LIBRARY
UNIVERSAL

THÉORIE
DE LA FIGURE
DE LA TERRE,

TIRÉE DES PRINCIPES DE L'HYDROSTATIQUE;

PAR CLAIRAUT,

De l'Académie royale des Sciences, et de la Société royale de Londres.

SECONDE ÉDITION.

PARIS,

Chez COURCIER, ~~Imprimeur-~~Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

1808.

On trouve à la même adresse un assortiment des plus complets d'ouvrages sur les Sciences, principalement sur les Mathématiques, et les Auteurs les plus rares, comme on peut le voir dans l'extrait de son Catalogue, qui se trouve à la fin de cet Ouvrage.

A MONSEIGNEUR

LE COMTE DE MAUREPAS,

Ministre et Secrétaire d'État de la Marine, Commandeur des Ordres du Roi.

MONSEIGNEUR,

La protection que vous accordez aux sciences, et les bontés dont vous m'honorez, ne sont pas les seuls mo-

tifs qui me déterminent à vous présenter cet Ouvrage; il vous appartient, MONSEIGNEUR, *par des droits particuliers; je m'y suis proposé de faire connaître une nouvelle utilité des fameuses opérations faites pour déterminer la figure de la Terre, il est bien juste que j'en fasse un hommage public à celui sous les auspices et par la protection duquel ces opérations ont été faites.*

Je suis avec un profond respect,

MONSEIGNEUR,

Votre très-humble et très-obéissant
Serviteur, CLAIRAUT.

INTRODUCTION.

QUAND on considère tout ce qui compose la surface de notre globe, les continens, les mers, les lacs, les montagnes, les courans des fleuves, etc.; on est d'abord porté à croire que toutes les recherches que peut fournir la théorie pour déterminer la figure de la terre, sont de vaines spéculations, et que même la mesure actuelle, ne saurait nous en faire connaître que de très-petites parties, sans en pouvoir rien conclure pour le tout.

Quand on remarque ensuite que les mers communiquent ensemble de toutes parts, que les côtes ne sont que très-peu élevées au-dessus de la mer, que la hauteur des plus grandes montagnes est presque nulle en comparaison du diamètre de la terre, que la déclivité des plus grands fleuves

ne suppose pas que leurs sources soient plus élevées (1) au-dessus du niveau de la mer, que ne le sont les montagnes; on vient bientôt à reconnaître que la figure de la terre doit dépendre des lois de l'hydrostatique, et que les opérations faites pour la mesurer doivent donner à peu près les mêmes résultats que si on les faisait sur une masse d'eau qui se serait durcie après avoir pris la figure que demande l'équilibre.

Mais les lois de l'hydrostatique ne pourraient-elles pas permettre que cette masse d'eau eût une forme irrégulière, qu'elle fût aplatie par un

---

(1) Pour éclaircir par un exemple ce que je viens d'avancer, je ferai remarquer que la Seine, dont le niveau a été observé avec tant de soin par M. Picard, a environ 1 pied de pente sur 1000 toises. Or, qu'on suppose une rivière deux ou trois fois plus rapide et que son cours soit de 2000 lieues, on n'aura pas une lieue pour la hauteur de la source au-dessus de l'embouchure.

pôle, alongée par l'autre, et que les méridiens ne fussent pas semblables? En ce cas, les opérations faites en Laponie, en France et au Pérou, ne pourraient nous donner la vraie figure de la terre? Voyons donc ce que demandent les lois de l'hydrostatique.

On sait, par les premiers principes de cette science, qu'un fluide ne saurait être en repos, à moins que sa surface ne soit de niveau, c'est-à-dire perpendiculaire à la ligne à plomb, parce qu'alors chaque goutte n'a pas plus de pente à couler d'un côté que d'un autre.

De là il suit, que si la force avec laquelle tous les corps tombent était toujours dirigée vers un même centre, la Terre devrait être parfaitement ronde, afin que les eaux qui la couvrent fussent en équilibre; mais si, au contraire, la direction de la pe-

santeur suit une ligne qui ne passe pas par le centre, la Terre ne sera plus sphérique, mais elle aura la forme nécessaire, pour qu'en chacun des points de sa surface elle soit coupée perpendiculairement par la direction de la pesanteur en ce point.

Toute la question de la Figure de la Terre est donc fondée sur la loi suivant laquelle la force de la pesanteur agit. Si cette force dépend d'une cause qui tire les corps tantôt d'un côté et tantôt d'un autre, qui n'agisse pas sur tous les méridiens de la même manière, qui augmente et diminue sans aucune règle; on ne pourra jamais espérer de connaître la figure de la Terre, et la théorie ni la pratique ne pourront la déterminer.

L'astronomie nous apprend que la force qui retient la Lune dans son orbite, est la même que celle qui fait tomber les corps ici bas; que cette

force agit dans tout l'univers ; qu'elle pousse les planètes vers le Soleil, et les satellites vers leurs planètes principales ; mais si toutes ces impulsions d'une même force suivent, ainsi que les observations astronomiques nous l'apprennent, des lois constantes, quoi de plus naturel que de penser que cette force, qui agit si régulièrement sur les corps célestes, agit de même sur la surface et au-dedans de la Terre ?

Il y a plus, nous apprenons par des observations faites en divers lieux, que la force avec laquelle les corps tombent sur la Terre, diminue en allant du nord au sud, et que cette diminution se fait régulièrement. Et quoique ces observations ne nous apprennent à mesurer que l'effort de la pesanteur sans nous apprendre sa direction, c'est-à-dire, sans nous montrer de combien elle écarte les corps

de la ligne tirée au centre, nous ne pouvons pas douter, ce me semble, que cette force ne suive une loi aussi régulière dans sa direction que dans la quantité de son impulsion; car ce serait être bien peu physicien, que d'abandonner tout ce que les observations astronomiques et géographiques nous apprennent, pour se livrer à une hypothèse dans laquelle la pesanteur pousserait les corps tantôt d'un côté, tantôt d'un autre, et ferait de la Terre un corps irrégulier.

Mais si tous ces phénomènes nous indiquent que la force de la pesanteur agit régulièrement, ils ne nous montrent pas exactement la loi suivant laquelle se fait son action sur la surface et au-dedans de la Terre; car on va voir que cette loi dépend du système de physique qu'on embrasse, et que par conséquent la théorie

seule ne peut pas donner la vraie figure de la Terre.

Examinons d'abord la manière dont la gravité (1) agit dans le système des tourbillons, et la figure de la Terre qu'elle demande.

L'illustre Descartes, qui n'avait pas été à portée de connaître les lois que les planètes observent dans leurs mouvemens, ne croyait avoir à expliquer dans le phénomène de la gravité, que cette tendance que tous les corps ont ici-bas vers le centre de la Terre. Pour en trouver la raison, il supposa que la Terre était enveloppée d'un

---

(1) Je fais ici la même distinction que M. de Maupertuis (la Figure de la Terre déterminée, etc.) entre la pesanteur et la gravité; j'entends par pesanteur, la force naturelle avec laquelle tout corps tombe, et j'appelle gravité la force avec laquelle ce corps tomberait, si la rotation de la Terre n'altérait pas son effort et sa direction.

tourbillon de matière subtile qui circulait sans cesse, et comme cette matière en circulant devait faire un effort pour s'écarter du centre du tourbillon, il prétendit que les corps graves ayant moins de force centrifuge que cette matière, ils cédaient à son effort, et étaient chassés vers le centre de la Terre.

Depuis que M. Newton a paru, les Cartésiens éclairés ont été forcés de reconnaître, que la force de la pesanteur était répandue dans tout l'univers; ils sont enfin convenus que la Lune est un corps grave qui pèse vers la Terre; que la Terre et toutes les planètes ont une semblable gravité vers le Soleil, ainsi que les satellites vers leurs planètes principales, et se trouvant encore obligés d'avouer que toutes ces gravités augmentent dans la même raison que le carré de la distance au corps central diminue,

ils ont cherché à tirer de leurs principes l'explication de ces phénomènes.

A l'exemple de Descartes, ils ont eu recours à la force centrifuge des tourbillons de matière subtile qui enveloppent et traversent chaque planète, et ils ont prétendu que cette force centrifuge donnait la loi du carré des distances que tous les graves observent. Mais comme, dans leurs principes, la matière subtile pousse les corps au centre du tourbillon, et que la force de cette matière ne dépend ni de la grandeur, ni de la densité, ni de la figure du corps central, il en est, suivant ces philosophes, des corps placés sur la surface et au dedans de la Terre, comme de ceux qui sont au-dehors à des distances considérables; ils doivent tous être dirigés également vers le centre, avec une force qui soit en raison renversée du carré de la dis-

tance à ce centre. Or cette loi de gravité demande nécessairement que la Terre ait une certaine figure.

Pour trouver cette figure, il faut commencer par examiner les changemens que la rotation de la Terre produit dans la direction et dans la quantité de la force de la gravité.

On sait que tous les corps qui tournent autour d'un axe dans le même temps, font pour s'en écarter, un effort proportionnel à leur distance à cet axe. On sait, de plus, qu'à l'équateur cet effort est la 288ème partie de celui de la pesanteur, de là on tire facilement quel il doit être dans un lieu quelconque.

Cela posé, pour trouver la force qui pousse un corps grave dans un lieu quelconque de la Terre, on se sert de ce principe si connu, qu'un corps sollicité par deux forces décrit la diagonale d'un parallélogramme,

dont les deux côtés représentent ces deux forces. On prend donc une ligne qui exprime la force avec laquelle le corps tomberait si la Terre ne tournait point, et une autre ligne qui exprime l'effort qui vient de la rotation de la Terre; sur ces deux lignes on forme un parallélogramme, dont la diagonale donne la direction suivant laquelle le corps tombe au lieu donné.

Il n'est pas difficile ensuite à ceux qui ont le calcul familier, de trouver la figure que la Terre doit avoir, afin que sa surface se trouve par-tout coupée perpendiculairement par la direction de la pesanteur, et que par conséquent cette surface soit de niveau. Par ce calcul, on trouve que la Terre est un sphéroïde aplati vers les pôles, dont l'axe doit être au diamètre de l'équateur dans la raison de 576 à 577. Voilà donc la figure de la Terre que demande la loi de pe-

santeur tirée du système des tourbillons, tel qu'il est présenté aujourd'hui par de nouveaux Cartésiens qui ont reconnu une partie du système de M. Newton : passons présentement à la figure de la Terre qui résulte du système de M. Newton admis entièrement.

Ce grand philosophe, après avoir tiré des analogies de Kepler la loi générale suivant laquelle les planètes sont poussées vers leur centre commun, examina de plus près cette loi, et il vit qu'elle souffrait quelque correction quand les planètes étaient à une certaine proximité les unes des autres; que la Lune, par exemple, ne décrivait pas exactement la même courbe qu'elle décrirait si elle était seulement attirée par la Terre; que la Terre ne parcourait pas non plus la même orbite que si le Soleil seul agissait sur elle, etc. Il se servit de l'astrono-

mie la plus délicate pour connaître ces dérangemens, et il trouva qu'ils étaient tels que la géométrie le demande, en supposant que la Lune, au lieu d'être attirée seulement par la Terre, le soit encore par le Soleil, et que la Lune et le Soleil agissent sur la Terre, ainsi que la Terre et la Lune sur le Soleil, en supposant toujours leur action proportionnelle à la masse du corps attirant, et dans la raison inverse du carré de la distance.

Cette tendance des planètes les unes vers les autres, ayant été indiquee à M. Newton par tous les phenomènes, il a régardé la gravitation comme une force universelle. En conséquence, il établit pour principe, que chaque particule de matière agit sur toutes celles qui sont dans l'univers proportionnellement à sa masse et à la raison inverse du carré de sa distance.

De là il est aisé de conclure que la pesanteur au-dedans et sur la surface de la Terre n'a plus pour direction la ligne tirée au centre: car un corps placé en un lieu quelconque de la Terre, est attiré à la fois par toutes les particules dont elle est composée, chacune agissant plus ou moins obliquement suivant sa position et avec plus ou moins de force suivant sa distance. Des attractions de toutes ces particules résulte une seule force qui ne tire plus le corps au centre; mais suivant une ligne d'autant plus écartée du rayon, que la Terre est plus éloignée d'être sphérique; et la ro-portion suivant laquelle cette force varie depuis l'équateur jusqu'au pôle, et de la surface de la Terre jusqu'au centre, ne sera plus en raison renversée du carré de la distance au centre, mais sera composée des forces de toutes ces particules combinées

avec tous les carrés de leurs distances au corps grave.

Il est bien vrai que la somme de toutes les attractions des particules de la Terre, et par conséquent l'attraction de la Terre même sur un corps placé à une distance considérable, sur la Lune par exemple, est toujours censée dirigée vers le centre, et agir suivant la raison inverse du carré des distances; mais cela vient de ce que l'éloignement de la Lune rend insensible la différence qui est entre la figure de la Terre et celle d'une sphère, et qu'on regarde, en ce cas, la Terre comme un globe (1) parfait, ce qu'on ne peut faire dans

(1) Pour bien entendre ceci, il faut savoir que la loi d'attraction suivant laquelle toutes les parties de la matière s'attirent réciproquement en raison renversée du quarré des distances, a cette propriété, que deux sphères, quelles que soient leurs masses, s'attirent avec la même force que si chacune avait sa quantité de matière réunie à

les cas où l'on considère les corps qui sont sur sa surface ou dans son intérieur.

Présentement il est bien facile de voir que la détermination de la figure de la Terre, dans le système de l'attraction, est une recherche bien différente de celle qu'on se propose dans le système des tourbillons. Car dans l'hypothèse des tourbillons, on a la loi de la pesanteur avant d'avoir la figure de la Terre, au lieu que dans le système de l'attraction on a deux objets à chercher à la fois : les Neutoniens doivent donc trouver un sphéroïde tel qu'un corpuscule placé dans un lieu quelconque de sa surface et qui est sollicité en même temps par la force centrifuge et par les attractions de toutes les parties du sphé-

---

son centre. Cette proposition est démontrée fort clairement dans un mémoire de M. de Maupertuis *Mém. de l'Académie*, 1732

roïde, prenne une direction perpendiculaire à cette surface.

Ce problème étant résolu, on trouve encore, comme dans le système des tourbillons, que la Terre doit être aplatie; mais le rapport de ses axes au lieu d'être celui de 576 à 577, est celui de 230 à 231, différence assez sensible.

Cette différence des aplatissemens que donnent les deux systèmes qu'on vient d'exposer, n'est pas la seule indécision où la théorie laissait les géomètres avant les mesures actuelles; il y en avait une autre d'autant plus importante, qu'elle devait être sentie par chacun de ceux qui avaient pris parti pour l'un ou pour l'autre de ces deux systèmes: c'est que les Neutoniens ne pouvaient pas regarder le rapport de 230 à 231, comme le seul que leur système pût donner, et que les Cartésiens ne pouvaient pas non

plus admettre le rapport de 576 à 577, comme le seul qui suivît de leurs principes : examinons d'abord ce qui regarde le système de M. Newton.

Dans ce système, on trouve pour le rapport des axes de la Terre, celui de 230 à 231, uniquement parce qu'on y suppose la matière de la Terre entièrement homogène; mais il est très-possible que les parties les plus proches du centre soient plus denses que les autres, et cela est même très-vraisemblable. Dans ce cas, la force de gravité d'un corps étant le résultat de toutes les attractions qu'exercent sur lui toutes les parties de la Terre, le plus ou le moins de densité de ces parties changera entièrement la loi suivant laquelle les corps graviteront, et de là le rapport des axes sera différent suivant les différens arrangemens et la

différente densité des parties intérieures de la Terre.

Dans le système des Cartésiens, ces considérations semblent d'abord n'avoir plus lieu; car nous avons vu que le rapport de 576 à 577, qu'ils trouvent entre les axes de la Terre, est celui qui doit résulter de la supposition que les corps placés sur la surface et au-dedans de la Terre, sont poussés de la même manière que ceux qui sont à une distance considérable de son centre : or, comme tous les Cartésiens l'ont supposé jusqu'à présent, on ne croirait pas qu'on pût tirer un autre rapport de leurs principes; mais ces philosophes ne sont pas plus restreints à cette supposition qu'à toute autre : car, après tout ce qu'ils ont su faire de la matière subtile, ils peuvent très-bien encore imaginer que lorsque cette matière traverse les parties intérieures

de la Terre, elle n'agit plus de la même manière qu'au-dehors, et que par conséquent la loi du carré des distances peut ne pas avoir lieu pour ces parties. Ils peuvent dire aussi que la matière subtile au lieu de pousser tous les corps vers un seul centre, les pousse perpendiculairement à une espèce de noyau mis au centre de la Terre, etc.

Ainsi, ni dans le système des tourbillons, ni dans celui de l'attraction, on ne saurait fixer précisément la loi suivant laquelle la pesanteur agit sur la surface et au-dedans de la Terre, et par conséquent la théorie seule ne peut donner avec exactitude la figure de la Terre; mais aussi sans la théorie qui nous fait voir que la Terre doit avoir une figure régulière, on ne pourrait pas se reposer sur les opérations faites au nord et au sud pour déterminer cette figure, il faudrait

mesurer sans cesse à toutes les latitudes et à toutes les longitudes.

L'avantage qu'on peut retirer de la théorie en examinant la question de la figure de la Terre, ne se borne pas à rendre les mesures actuelles décisives ; la liaison que cette question a nécessairement avec celle de la pesanteur, montre encore que la vraie figure de la Terre étant connue par le secours des mesures actuelles, la théorie en doit tirer de grandes lumières pour le système général du monde.

Afin d'employer, suivant cette vue, le concours de la théorie et des observations, j'ai cherché d'abord le rapport des axes de la Terre et la variation de la pesanteur sur sa surface, par une méthode qui convient à quelque hypothèse de gravité que ce soit ; et j'ai comparé ensuite les résultats que donnent les hypothèses

les plus vraisemblables, avec ceux que donnent les mesures actuelles.

La première utilité qu'on peut tirer de cette comparaison, c'est d'exclure beaucoup d'hypothèses sur la loi de gravité auxquelles on se serait peut-être arrêté par leur simplicité. On peut démontrer, par exemple, qu'il faut rejeter toutes les hypothèses dans lesquelles les corps graviteraient vers le centre de la Terre, quelle que fût la loi suivant laquelle ils y fussent poussés: car je fais voir que toutes ces hypothèses donneraient pour le rapport de l'axe au diamètre de l'équateur, celui de 576 à 577, ou un rapport approchant. Or comme le rapport des axes que donne la comparaison du degré mesuré en Laponie avec celui qui a été mesuré en France, est trop loin de celui de 576 à 577 pour pouvoir y être réduit, en ne supposant dans les observations que les lé-

gères erreurs qui pourraient s'y être glissées, il faut donc abandonner toutes les hypothèses qui donneront ce rapport.

Mais la comparaison de la théorie avec les observations pourra être d'une utilité plus importante que l'exclusion de quelques hypothèses particulières : elle achèvera peut-être de décider en faveur d'un système qui a déjà tant d'apparence d'être vrai, je veux dire celui de M. Newton. Car l'attraction étant supposée, je démontre dans cet ouvrage, que dans toutes les hypothèses les plus vraisemblables qu'on puisse faire sur la densité des parties intérieures de la Terre, il y a toujours une telle liaison entre la fraction qui exprime la différence des axes, et celle qui exprime la diminution de la pesanteur du pôle à l'équateur, que si l'une de ces deux fractions surpasse $\frac{1}{230}$, l'autre doit être

moindre, et précisément de la même quantité. Or, comme toutes les expériences qu'on a faites sur la longueur du pendule nous montrent que la diminution de la pesanteur du pôle à l'équateur est plus grande que $\frac{1}{230}$, on en doit conclure que la différence des axes est moindre que $\frac{1}{230}$. Il n'est donc plus question que de savoir si cette conclusion s'accorde avec les mesures actuelles; c'est ce que nous saurons après le retour des Académiciens qui sont allés au Pérou, car la grande différence qui doit être entre le degré qu'ils ont mesuré et celui que nous avons mesuré en Laponie, doit nous apprendre le vrai rapport des axes.

L'accord des mesures actuelles avec la théorie, n'est pas la seule épreuve qu'un système doive subir avant d'être admis; il en faut encore une que l'hydrostatique seule fournit. Il faut exa-

miner si dans ce système les fluides peuvent être en équilibre : car comme on sait par expérience que les mers sont en repos, il est clair qu'il faudrait abandonner tout système dans lequel la pesanteur serait telle, que les fluides ne pourraient pas être en équilibre. On verra dans cet ouvrage, que toutes les lois de pesanteur qui peuvent résulter du système de l'attraction, sont telles, que les fluides y parviennent toujours à l'état d'équilibre.

M. Bouguer est, je crois, celui auquel on doit cette remarque judicieuse, qu'il y a des hypothèses de pesanteur où les fluides ne seraient jamais en équilibre. Cet habile géomètre, en cherchant la figure des planètes dans des hypothèses beaucoup plus générales que celles qu'on avait prises avant lui, trouva que, dans une infinité de cas, la figure que

demande l'équilibre de toutes les colonnes de fluide, qui vont de la surface au centre, n'est pas la même que celle qu'il faut pour que la surface soit coupée perpendiculairement en tous ses points par la direction de la pesanteur, et comme ces deux conditions sont également nécessaires, il conclut qu'une planète ne peut avoir un état permanent que dans les hypothèses où ces deux conditions donneraient la même figure.

Mais si l'on voit, avec M. Bouguer, que ces deux conditions, également nécessaires pour l'équilibre des fluides, ne suivent pas l'une de l'autre, ne pourrait-il pas se faire qu'il y eût encore d'autres conditions à observer, entièrement différentes des deux premières, et cependant aussi nécessaires ?

C'est cette réflexion qui m'a engagé à chercher les lois de l'hydro-

statique qui conviennent en général à toutes sortes d'hypothèses de pesanteur: recherche qui m'a paru utile et curieuse (1), indépendamment du rapport qu'elle a avec la figure de la Terre.

J'ai bientôt reconnu qu'il était vrai, ainsi que je l'avais soupçonné, que l'accord des deux principes ordinaires, c'est-à-dire l'équilibre des colonnes et de la tendance perpendiculaire à la surface, n'assurait pas l'équilibre d'une masse fluide; car j'ai trouvé qu'il y avait une infinité d'hypothèses de pesanteur où ces deux principes donneraient la même courbe, sans que pour cela les efforts de toutes les parties du fluide se contrebalançassent mutuellement. J'ai trouvé ensuite deux méthodes générales et sûres,

---

(1) On trouvera pag. 105, la manière d'expliquer, par cette théorie, les phénomènes des tuyaux capillaires.

pour reconnaître les hypothèses de pesanteur dans lesquelles les fluides peuvent être en équilibre, et pour déterminer la figure que les planètes doivent avoir dans ces hypothèses.

Avant que de passer à l'explication de ces deux méthodes, il est à propos de lever une difficulté qui se présente assez naturellement sur la rotation des masses fluides. On comprend fort facilement, que lorsqu'un corps est obligé de décrire un cercle, il fait pour s'éloigner de son centre un effort, et que cet effort dépend de sa vîtesse et du rayon du cercle dans lequel il circule; ainsi quand on combine, comme on a fait plus haut, la gravité de chaque particule d'une planète avec l'effort centrifuge de cette particule pour s'écarter de l'axe de rotation, on conçoit cette particule comme obligée de se mouvoir dans un cercle. Mais pourquoi ces parti-

cules circulent-elles toutes ensemble?

Il est facile de voir comment un corps solide peut conserver de lui-même son mouvement de rotation: car il ne faut, pour cela, que jeter les yeux sur une baguette chargée de deux poids auxquels on donne des impulsions en sens contraire et en raison réciproque de leurs masses; les mêmes principes qui montrent que cette baguette tournera sans cesse autour de son centre de gravité, feront facilement reconnaître qu'en donnant une fois à un corps solide quelconque une impulsion convenable, il tournera sans cesse autour d'une ligne passant par son centre de gravité. Mais lorsque le corps est fluide, ce n'est plus la même chose; chaque particule, détachée des autres, semble vouloir faire son mouvement à part, autour du point vers lequel la force de gravité la pousse: il en est d'un

atôme quelconque, comme d'une planète qui décrit une orbite autour d'un corps central en vertu d'une impulsion, et de la force qui la pousse vers le corps central; ainsi, toutes les particules dont une masse fluide est composée, tendent à décrire des courbes qui se croisent continuellement; de là devrait résulter une confusion générale dans la planète. A quoi donc attribuer la rotation régulière autour d'un axe? faut-il aller chercher quelque matière subtile qui emporte toutes les parties de la planète et les conduit comme si elle les poussait dans des tuyaux circulaires? Mais il faudrait alors comprendre la rotation de cette matière subtile, et démontrer quelle ne troublerait pas l'équilibre plutôt que de le produire; il faudrait se jeter dans toutes les difficultés du système du monde. Les seules règles de la mécanique vont

nous donner le dénouement de cette difficulté.

Nous tirerons de la figure même de la planète, la continuation de son mouvement. On va voir que cette figure peut être telle, que toutes les parties du fluide, au lieu de décrire des courbes qui se croisent, se contre-balanceront les unes les autres, de manière qu'il en résultera une pression égale en tous sens, et que chacune de ces parties ne pourra avoir d'autre mouvement que celui de la rotation commune à toute la masse. Il est vrai qu'on n'expliquera pas par-là comment les planètes ont prise d'elles-mêmes leurs figures; mais ne nous suffira-t-il pas de savoir comment elles peuvent le conserver?

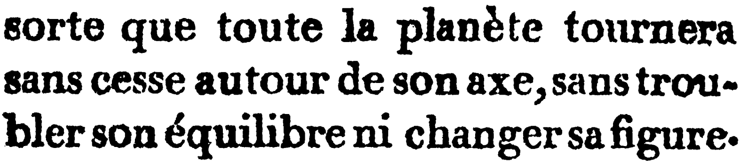
Imaginons d'abord, qu'un atôme quelconque de la planète vienne de parcourir dans un temps infiniment petit, le côté *Mm* d'un cercle, dont

le centre Q est dans l'axe de rotation; s'il était alors abandonné à lui-même, il est certain que dans un second instant égal au premier, il parcourrait mn égal à Mm, et placé sur le prolongement de cette ligne; mais il est certain aussi, qu'au lieu de la force qu'il aurait pour parcourir mn, on peut lui en substituer deux autres; l'une dont la direction est $m\mu$, et qui fait suivre à l'atôme la circonférence dont Qm est le rayon; l'autre, dont la direction est μn, parallèle à Qm, et qui tend à écarter l'atôme du centre Q.

Qu'on suppose maintenant, que toutes les forces telles que Mm, qu'avaient les globules dans le premier instant, aient été proportionnelles à

leur distance MQ à l'axe, il est clair que ni ces forces, ni les forces $m\mu$ qui en résultent pour le second instant, ne pourraient rien changer à la situation respective des parties. Quant aux forces μn qui seraient, ainsi que les forces Mm, proportionnelles à la distance de l'axe de rotation, elles tendraient naturellement à déranger toute la planète, puisque leur effet serait d'écarter de l'axe tous les globules de fluides; mais il est aisé de voir que la figure de la planète peut être telle que cet effet sois détruit : car si ces forces μn, qu'ont chaque particule, sont déduites de la force de la gravité qu'ont les mêmes particules, et qu'on donne à toute la masse fluide la forme nécessaire pour que toutes ses parties, animées par cette gravité diminuée des forces μn, soient en équilibre entre elles; on verra que chaque par-

ticule, qui, dans le premier instant avait parcouru le petit côté *Mm* placé sur la circonférence d'un cercle, parcourra dans le second instant le second côté *mμ* du même cercle, et ainsi de suite, ensorte que toute la planète tournera sans cesse autour de son axe, sans troubler son équilibre ni changer sa figure.



Ainsi lorsqu'on veut chercher la figure que doit avoir une masse fluide qui tourne autour de son axe, on peut la regarder comme si elle était en repos, et comme si elle était composée de parties, qui, au lieu d'être simplement animées par la gravité, fussent outre cela sollicitées par une force qui les écartât de l'axe, et proportionnellement à la distance à cet axe.

THÉORIE DE LA FIGURE DE LA TERRE.

PREMIÈRE PARTIE.

Principes généraux pour trouver les hypothèses dans lesquelles les fluides peuvent être en équilibre, et pour déterminer la figure de la Terre et des autres Planètes, lorsque la loi de la pesanteur est donnée.

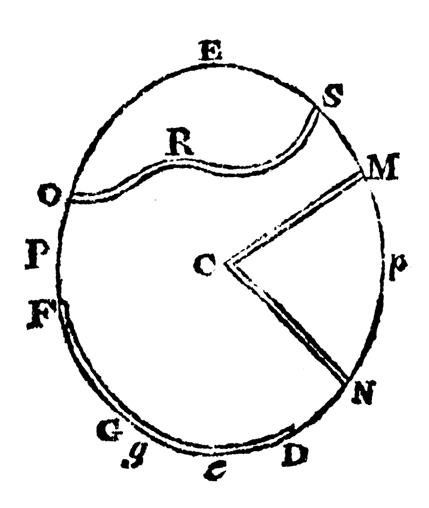
CHAPITRE PREMIER.

Exposition d'un principe général dont l'observation est nécessaire pour l'équilibre des fluides, avec les propositions préliminaires pour faire usage de ce principe.

§ PREMIER.

Une masse de fluide ne saurait être en équilibre, que les efforts de toutes les parties qui sont comprises dans

un canal de figure quelconque qu'on imagine traverser la masse entière, ne se détruisent mutuellement.



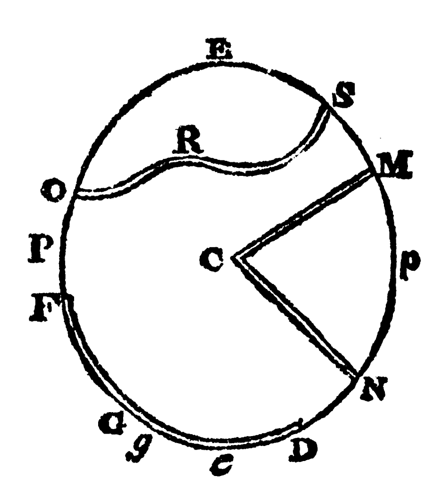
Puisque la masse entière *PEpe* est supposée en équilibre, une partie quelconque du fluide pourrait devenir solide, sans que le reste changeât de situation. Supposons que toute la masse se durcisse, excepté ce qu'il faut de fluide pour former la canal *ORS*, ce canal sera donc en équilibre ; or cela ne peut arriver que les efforts de *OR* pour sortir vers *S*, ne scient égaux à ceux de *SR* pour sortir vers *O*.

§ II.

Il est clair que les deux principes ordinairement employés à trouver la ſigure de la Terre, sont renfermés dans celui que je viens d'exposer. Examinons d'abord le premier de ces deux principes, celui de M. Newton; il consiste à rendre égal le poids des deux colonnes quelconques *MC*, *NC* qui aboutissent au centre. Or comme ces deux colonnes font ensemble un canal *MCN* qui joint, ainsi que *ORS*, deux points quelconques de la surface, il est clair qu'aussitôt qu'on aura rendu la ſigure *PEep* telle qu'un canal quelconque soit en équilibre, on sera sûr que les colonnes *MC*, *NC*, seront de même poids.

Quant au second principe dû à M. Huygens, il est fondé sur ce que la courbe *PEpe* doit être en tous ses points coupée perpendiculairement par la direction de la pesanteur; or je dis que l'observation de ce principe suit

nécessairement de l'équilibre d'un canal quelconque. Car supposons que le



canal quelconque *ORS* soit devenu le canal *FGD* couché le long de la surface du fluide, ce canal devra être en équilibre comme tous les autres. Mais cela ne saurait arriver que des deux manières suivantes, ou parceque la tendance de la pesanteur en chaque point *G* sera perpendiculaire à la direction *Gg* du canal, ou parcequ'une partie *FG* poussant vers *D* est contrebalancée par l'autre partie *GD* qui pousse vers *F*. Or cette seconde condition ne saurait

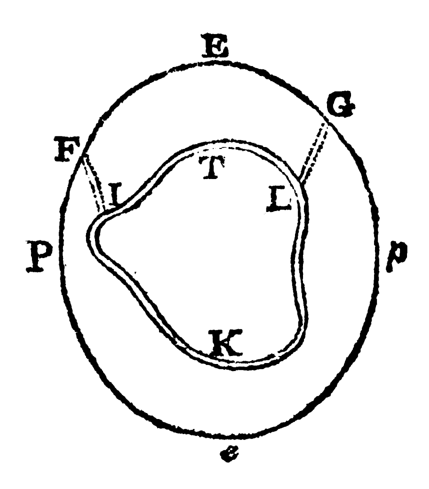
avoir lieu, car comme rien ne fixe la longueur du canal, il faut qu'une partie *FG* soit seule en équilibre aussi bien que toute la longueur *FGD*, ce qui n'arriverait pas, si *FGD* n'avait été en équilibre qu'en conséquence de l'égalité des pressions de *FG* et de *DG*.

§ III.

Afin qu'une masse de fluide puisse être en équilibre, il faut que les efforts de toutes les parties de fluide renfermées dans un canal quelconque rentrant en lui-même, se détruisent mutuellement.

Cette proposition est fondée ainsi que le § I, sur ce que l'équilibre général d'une masse de fluide demande nécessairement l'équilibre de toutes ses parties : qu'on suppose donc que tout le fluide vienne à se durcir, excepté un canal quelconque rentrant en lui-même, il est évident que si la masse entière du fluide était en équilibre. le canal fluide qui reste après le durcissement des par-

ties voisines, doit être aussi en équilibre ; c'est-à-dire que si, sur ce canal, on prend à volonté deux points *I*, *L*,



les efforts des deux parties *IKL*, *ITL* l'une contre l'autre seront égaux, sans quoi il y aurait un courant perpétuel dans ce canal.

On peut regarder encore l'équilibre d'un canal rentrant en lui-même, comme un corollaire de l'équilibre de tout canal qui joint deux points pris à volonté sur la surface ; car si on imagine deux canaux *IF*, *LG* qui partent de deux des

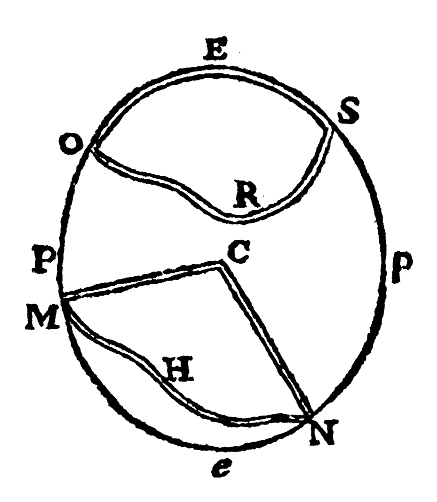
points *I*, *L* du canal pour aller à la surface, les deux canaux *FIKLG*, *FITLG* auront les parties communes *FI*, *LG*, et seront chacun en équilibre; retranchant donc les deux poids communs, *FI*, *LG*, il restera les deux parties *IKL*, *ITL* dont les efforts seront les mêmes.

§ IV.

Après avoir prouvé que l'équilibre d'un canal rentrant en lui-même, suit de l'équilibre d'un canal quelconque qui traverse entièrement le fluide, il nous reste à faire voir que quand la loi, suivant laquelle la pesanteur agit, sera telle qu'un canal quelconque rentrant en lui-même sera en équilibre, il y aura toujours une surface à donner au fluide, telle que tous les canaux qui traverseront la masse entière, seront en équilibre.

Pour le démontrer, nous ferons remarquer, que quand la loi de la pesanteur est donnée, c'est un problème déterterminé que de trouver la figure que doit avoir une planète, afin qu'un des deux

principes ordinaires, celui de M. Huygens, par exemple, soit observé. Supposons donc que *PEpe* soit la figure determinée par ce principe, et de plus qu'on



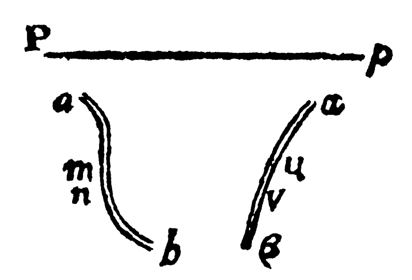
ait reconnu qu'un canal quelconque rentrant en lui-même, est toujours en équilibre, il s'ensuivra qu'un canal *OESR* dont une partie *OES* serait couchée sur la surface, serait aussi en équilibre; mais la partie *OES* par l'observation supposée du principe de M. Huygens, ne fera d'effort ni vers *O* ni vers *S*; donc le canal *ORS* sera en équilibre.

Il en serait de même si on avait déterminé la surface par le principe de

M. Newton, car de l'équilibre des canaux quelconques rentrant en eux-mêmes suivrait l'équilibre d'un canal *MCNH*; mais *MCN* serait en équilibre par l'hypothèse : donc *MHN* y serait aussi.

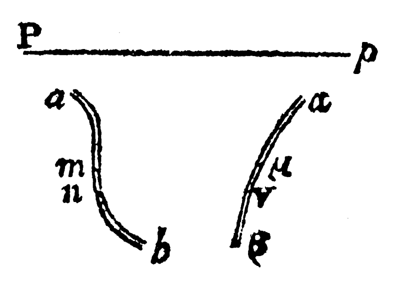
§ V

Si deux canaux ab, *aβ remplis de fluide, et tournant autour d'un axe* Pp, *ont leurs extrêmités* a b; *α, β, à des*



distances de l'axe Pp, *qui soient respectivement égales, l'effort total que la force centrifuge fera faire au fluide renfermé dans le canal* ab *pour le faire sortir par* b, *sera le même que l'effort total que la force centrifuge fera faire au fluide renfermé dans le canal aβ pour le faire sortir par β.*

Pour le prouver, imaginons que chacun des canaux *ab*, *αβ* soit partagé en une infinité de petits cylindres *mn*, *μν* dont les extrémités soient aussi à des distances de l'axe, qui soient respecti-

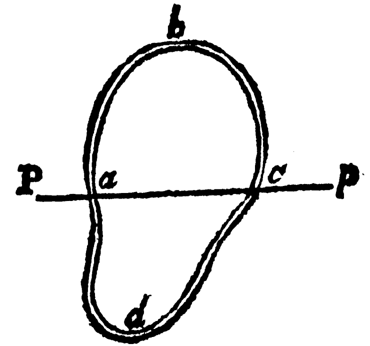


vement égales. A cause de la petitesse de *mn* et de *μν*, on pourra regarder les forces centrifuges comme constantes dans toutes les particules qui composent les petits cylindres *mn* et *μν* : de plus, la révolution de toutes les parties du fluide se faisant dans le même temps, la force centrifuge sera la même en *m* et en *μ* ; mais les parties de ces forces qui agiront dans les directions *mn* et *μν*, seront par la théorie des plans inclinés réciproquement comme les longueurs *mn* et *μν*, et les masses seront comme les longueurs mêmes : donc les efforts de

mn et de $\mu\nu$, vers *b* et vers β seront égaux : donc l'effort total de *ab* et celui de $\alpha\beta$ seront aussi égaux.

§ VI.

Lorsqu'on veut examiner si une loi de gravité est telle qu'une masse de fluide qui tourne autour d'un axe puisse conserver une forme constante, il est inutile de faire attention à la force centrifuge; c'est-à-dire, que si la masse de fluide peut avoir une forme constante sans tourner, elle pourra aussi en avoir une en tournant.

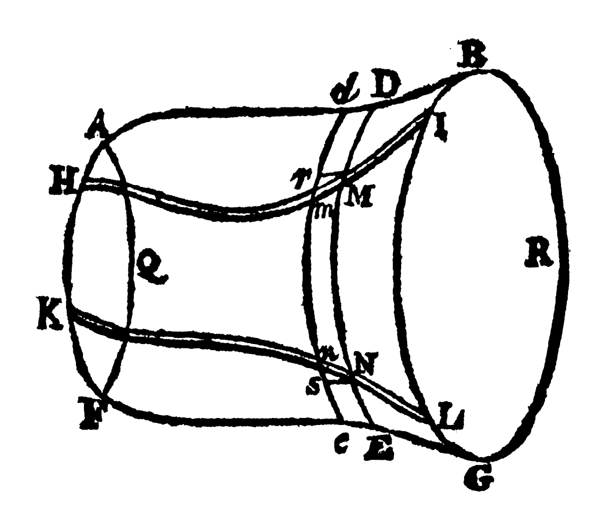


Par le § III, il faut qu'un canal quelconque *abcd* rentrant en lui-même, soit en équilibre, afin qu'une masse de fluide puisse conserver une forme constante. Par le § précédent, la somme des efforts de la force centrifuge sur *abcd* doit être nulle, puisque *ab* et *cd* se presseront également en *b*, ainsi

que *ad* et *cd* en *d* : donc la rotation n'empêchera pas l'équilibre d'un canal quelconque rentrant en lui-même, et par conséquent si ce canal est en équilibre, en ne considérant que la seule gravité, il le sera encore en supposant au lieu de la gravité, la pesanteur actuelle composée de la gravité et de la force centrifuge.

§ VII.

La force de la pesanteur étant supposée la même dans tous les points d'un



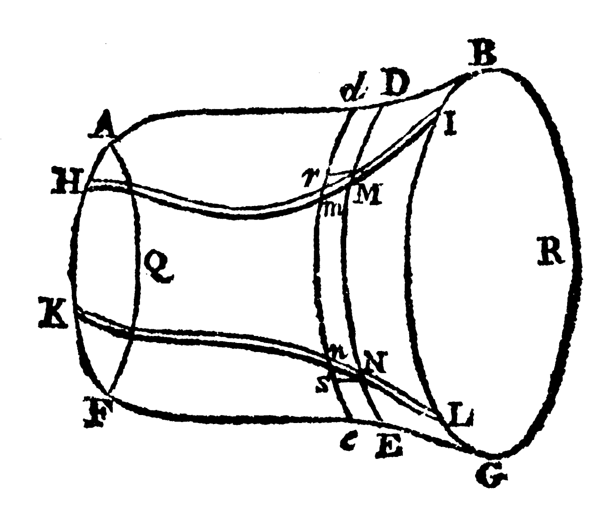
cercle parallèle à l'équateur, si deux canaux HI, KL *remplis d'un même*

fluide sont terminés par deux cercles quelconques AHKFQ, BILGR *parallèles à l'équateur, et sont l'un et l'autre placés sur une même surface de circonvolution* AFGB, *dont ces deux cercles sont deux tranches; je dis que les poids de ces deux canaux seront les mêmes.*

De ce que la pesanteur agit de la même manière dans tous les points d'un parallèle à l'équateur, il s'ensuit qu'un corps qui serait placé en un point quelconque *M* sur la surface *ABGF* sans pouvoir sortir de cette surface, ne pourrait prendre d'autre direction que celle du méridien *Mr*; supposant donc que *Mm* et *Nn* soient deux tranches des canaux *HI*, *KL* coupées par des plans *DE*, *de*, parallèles à l'équateur, les forces qui agiront sur les particules de ces petits cylindres, auront pour direction *Mr* et *Ns*, et de plus seront égales.

Cela posé, comme les parties des forces *Mr* et *Ns* qui agissent dans les directions *Mm* et *Nn* des cylindres, seront en raison renversée des longueurs

Mm et *Nn*, et que les masses seront en raison directe des mêmes longueurs,



les poids de *Mm* et de *Nn* seront les mêmes : donc les poids entiers de *HI* et de *KL* seront aussi égaux entre eux.

§ VIII.

PRINCIPE GÉNÉRAL.

Pour qu'un sphéroïde fluide tournant autour de son axe, et dans lequel la loi de la gravité est donnée, puisse conserver une forme constante, il suf-

sit qu'un canal quelconque rentrant en lui-même, et placé dans le plan du méridien de ce sphéroïde, soit toujours en équilibre, en ne considérant que la seule force de la gravité sans la force centrifuge.

Par le § VI, il suffit de faire voir que les efforts qui proviennent de la gravité sur toutes les parties d'un canal rentrant en lui-même se détruisent, ou ce qui revient au même, que le poids d'un canal quelconque *HI*, soit le même que celui de tout autre canal qui passerait par les mêmes points *H*, *I*; mais par le § précédent, si *ABFG* est la surface de circonvolution sur laquelle est placé le canal *HI*, le poids du canal *AB* qui serait la rencontre de cette surface par le plan d'un méridien, serait le même que celui de *HI* : donc il suffit de voir qu'un canal quelconque rentrant en lui-même et placé dans un méridien, soit en équilibre, pour être sûr que toutes les parties du sphéroïde y seront.

Du principe que je viens d'exposer, je pourrais tirer maintenant la méthode générale de déterminer toutes les hypo-

thèses de pesanteur, dans lesquelles un fluide peut être en équilibre; mais comme les hypothèses qu'on a le plus communément employées, se peuvent aisément traiter sans le secours de la méthode générale, je commencerai par l'examen de ces hypothèses.

CHAPITRE II.

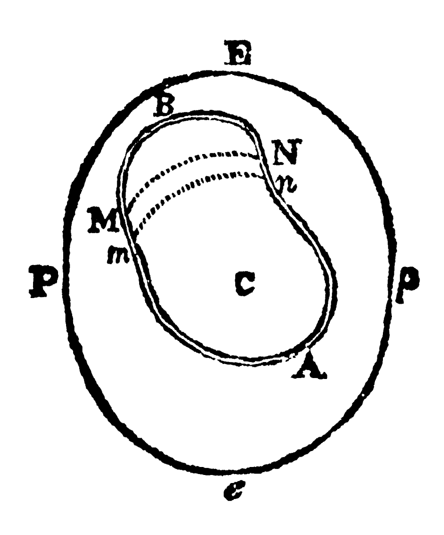
De l'équilibre des fluides dans lesquels la gravité est le résultat de plusieurs forces quelconques qui poussent chacune vers un centre particulier.

§ IX.

Lorsqu'il n'y a qu'un centre de tendance.

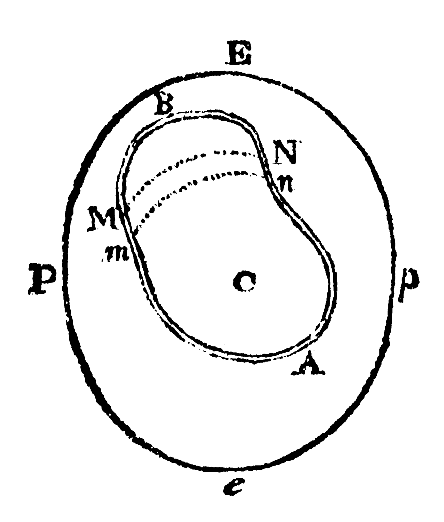
Toutes les parties d'une masse fluide qui tourne autour d'un axe, étant animées d'une force qui les pousse vers un centre, et suivant une loi qui ne dépend que de la distance à ce centre, il est extrêmement facile de s'assurer que la masse fluide prendra une forme où elle sera en équilibre.

Car par le § III une masse de fluide pourra arriver à un état permanent, si un canal quelconque rentrant en lui-même est en équilibre, en ne considérant que la seule force de la gravité.



Soit donc *MBNA* un canal quelconque rentrant en lui-même; il est clair que si du centre *C* on décrit une infinité d'arcs, tels que *MN*, *mn*, ce canal se trouvera composé de deux branches *BMA*, *BNA* qui auront chacune le même nombre de cylindres *Mm*, *Nn*; mais la force de la gravite étant la

même en *M* qu'en *N* par l'hypothèse, et le cylindre *Mm* ayant la même hauteur que son correspondant *Nn*, il

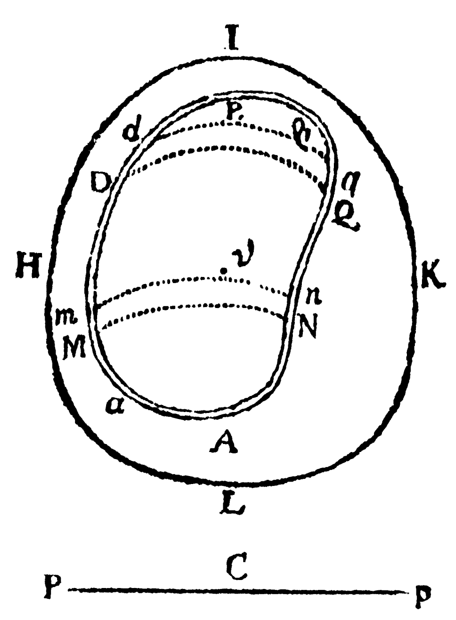


s'ensuit que leurs poids seront égaux. Donc les deux branches entières *BMA*, *BNA* auront aussi le même poids: donc le canal *MBNA* sera en équilibre. Ainsi ón n'aura qu'à déterminer la surfàce *PEpe* du sphéroïde par l'un des principes ordinairement employés, et l'on sera sûr que l'intérieur du sphéroïde sera dans un repos parfait.

§ X.

Lorsqu'il y a plusieurs centres de tendance

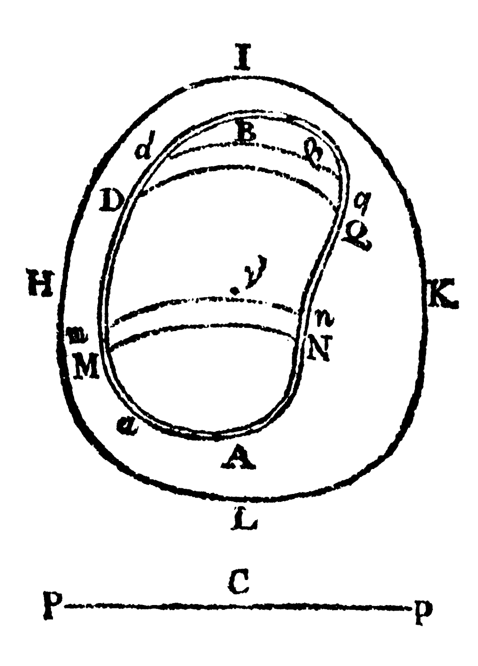
Supposons, par exemple, avec M. de Maupertuis (*), qu'un torrent de fluide tourne autour d'un axe *Pp*, et que chaque particule de ce torrent soit poussée par deux forces; l'une tendante au centre



C placé hors du torrent, l'autre au

(*) Voyez l'ingenieuse explication que M. de Maupertuis a donnée de la formation de l'Anneau de Saturne. Figure des Astres pag 126 et suiv., seconde édition.

centre γ placé dans l'intérieur, tous les deux dans le plan du méridien. On va voir que si le méridien *HIKL* de la figure annulaire que doit prendre ce torrent, a été déterminé par l'un des prin-



cipes ordinaires, toutes les parties du fluide seront en équilibre.

Pour en être convaincu, il faut se rappeler (§ VIII) què l'équilibre général d'une planete a été reduit à l'équilibre d'un canal quelconque rentrant en lui même, et placé dans le plan du méridien. Soit donc *BDMANQ* un

canal quelconque de cette nature, par le § précédent, si on partage ce canal en une infinité d'élémens, tels que Mm, Nn, par des cercles décrits du centre C, on aura deux branches BNA, BMA qui contiendront le même nombre de ces élémens, et dont les efforts provenant seulement de la force vers C seront les mêmes. Ensuite si on partage le même canal en une infinité d'autres élémens, Dd, Qq par des arcs de cercles DQ, dq décrits du centre γ; on aura encore les deux branches $\beta D\alpha$, $\beta Q\alpha$ contenant le même nombre d'élémens, et qui étant animées de la force qui pousse vers γ, se contrebalanceront encore : donc le canal $BDMANQ$ sera en équilibre en vertu des deux forces, comme il le serait par une seule. Donc, § VIII, le fluide entier ou la planète annulaire sera en équilibre dans toutes ses parties.

Si au lieu de supposer dans chaque méridien deux centres de forces, on en supposait un nombre quelconque, on voit bien qu'il ne faudrait pas d'autre

démonstration pour faire voir l'équilibre général des sphéroïdes, ou des anneaux qui se formeraient dans ces cas.

§ XI.

Lorsque la gravité est produite par l'attraction d'un corps central de figure quelconque.

Dans le § précédent, on a supposé, ainsi que dans la détermination des anneaux qu'a donnée M. de Maupertuis, que chaque centre n'agissait que dans le plan du méridien où il était placé. Si on voulait cependant que la gravité de chaque particule fût le résultat des attractions en tout sens, de toutes les parties du cercle qui sert, pour ainsi dire, de centre à l'anneau, il serait aisé de démontrer l'équilibre des parties de l'anneau. Car représentons-nous dans l'intérieur de l'anneau un canal quelconque rentrant en lui-même à double ou à simple courbure; il est évident par l'argument du § IX, que chaque parti-

cule du cercle attractif exercera sur ce canal des efforts qui se contrebalanceront. Donc les efforts du cercle entier sur le fluide de l'anneau se contrebalanceront aussi; donc le fluide total sera en équilibre.

Quant à la détermination de la figure de l'anneau, pour la trouver dans cette hypothèse, il faudrait commencer par calculer la somme de toutes les attractions des parties d'un cercle sur un corpuscule placé hors de lui, problème qui ne dépend que des quadratures; le reste serait facile par le principe de M. Huygens.

Il ne serait pas plus difficile de s'assurer de l'équilibre d'un sphéroïde ou d'un anneau, si la pesanteur dépendait de l'attraction de toutes les parties d'un noyau solide qui aurait ou la forme d'un sphéroïde, ou celle d'un anneau.

Et la détermination du sphéroïde ou de l'anneau, dans cette hypothèse, ne dépendrait encore que des quadratures.

§ XII

Lorsque la pesanteur vient de l'attraction générale de toutes les parties de la planète.

Si on suppose, comme on le doit faire dans le système de l'attraction, que la pesanteur en chaque point de la planète, soit causée non-seulement par l'attraction de toutes les parties du noyau, mais encore par celle du fluide même qui l'environne, la détermination de la figure du sphéroïde est infiniment plus difficile, parcequ'alors la loi de la gravite dépend de la courbe qu'on cherche, mais le problème, pour être difficile, n'en est pas moins possible; car on voit clairement, ce me semble, qu'il existe une courbe telle que l'attraction du solide qu'elle forme, jointe à celle du noyau, produit vers la superficie une gravité qui, combinée avec la force centrifuge, donne pour force composée, une force dont la direction est perpendiculaire à la surface : prenant donc cette

courbe pour donnée, alors par la même raison qu'on voit la possibilité d'un équilibre parfait dans le sphéroïde où la pesanteur est produite par la seule attraction d'un noyau de figure donnée ; on verra aussi la possibilité, ou plutôt la nécessité de l'équilibre dans le sphéroïde, où le fluide terminé par cette courbe regardée comme connue, attire ainsi que le noyau.

Et on reconnaîtrait facilement la possibilité d'un anneau dans la même hypothèse.

On voit de même que s'il n'y avait point de noyau, mais que la gravité fût produite par l'attraction d'une masse fluide homogène, il y aurait toujours un sphéroïde parfaitement en équilibre, et qu'il suffirait pour le déterminer, de se servir du principe de M. Huygens, ou de celui de M. Newton, ou bien encore de l'équilibre de canaux à qui on donnerait la forme qu'on voudrait, pourvu qu'ils aboutissent à deux points quelconques de la surface.

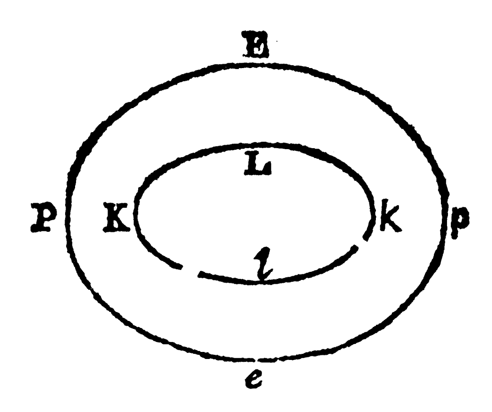
Si on supposait que le noyau solide dont nous parlions tout-à-l'heure, fût composé de couches de différentes densités, on voit encore que le sphéroïde dont la surface serait déterminée à l'ordinaire, aurait toutes ses parties dans un parfait équilibre.

§ XIII.

Manière d'expliquer dans le système de l'attraction l'équilibre d'une planète, dont la figure serait supposée à volonté.

Dans ce système, si on ne suppose pas toutes les parties d'une planète homogènes, mais qu'on imagine qu'elle ait un noyau solide de telle densité et de telle forme qu'on voudra, il est bien aisé de voir qu'on pourra donner à cette planète une forme quelconque aplatie ou alongée; car on sent bien qu'on peut trouver un sphéroïde *KLkl*, tel que son attraction étant ajoutée à celle de la matière renfermée entre le sphéroïde donné *PEpe*, et le sphéroïde cherché *KLkl*, produise, après avoir eu égard à la force centrifuge, une force dont la

direction soit perpendiculaire à la surface *PEpe*; et la courbe *KLkl* étant



regardée comme connue, on sait par ce qui précède, que toutes les parties du fluide qu'elle termine, seront en équilibre.

On n'aurait pas pu se contenter de ce raisonnement, même avant les mesures du nord, pour expliquer comment la Terre aurait pu avoir une forme quelconque, alongée, par exemple; car dans la recherche de la figure de la Terre, il y a une attention à avoir, qui est inutile pour les autres planètes : c'est que la loi suivant laquelle on suppose qu'agit la gravité, doit s'accorder avec les observations qui nous ont appris que le

pendule qui bat les secondes, devait être raccourci en allant du nord au sud; or la démonstration précédente n'ayant point d'égard à ce raccourcissement du pendule, il faut savoir ce que cette circonstance ajoute de plus à la question: c'est ce que nous ferons dans le chapitre III de la seconde Partie.

CHAPITRE III.

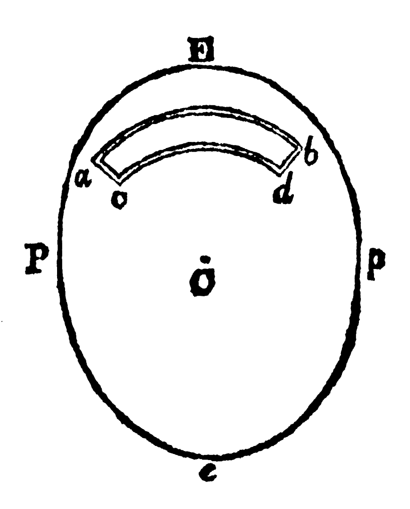
Examen d'une loi de pesanteur dans laquelle une planète n'arriverait jamais à une forme constante, quoique les deux principes ordinairement employés s'accordassent a donner la même figure au sphéroïde.

§ XIV.

Après avoir parcouru tant d'hypothèses, où il est toujours possible qu'il se forme une planète qui conserve constamment sa figure, montrons-en une où il y aurait un mouvement perpétuel dans les parties du fluide. Reprenons, par exemple, l'hypothèse où la

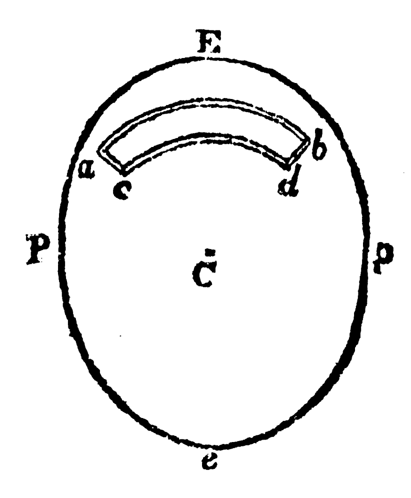
force de la gravité est dirigee vers un centre; mais supposons qu'au lieu de dépendre simplement de la distance à ce centre, elle dépende encore de quelqu'autre quantité, comme de l'angle que le rayon fait avec l'axe, etc. Nous allons voir que les fluides ne seraient jamais en équilibre dans cette hypothèse.

Car soit conçu dans le sphéroïde *PEpe* un canal *abdc* composé de deux



arcs de cercle, dont le centre *C* soit le point vers lequel pousse la gravité, et de deux petits cylindres *ac*, *bd* dirigés

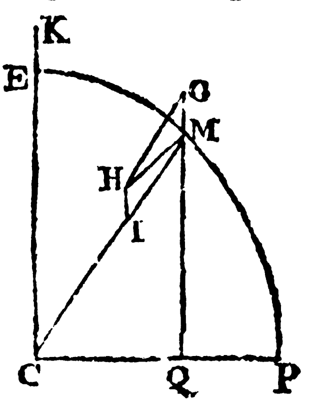
vers le centre; il est évident que la gravité ne fera aucun effet dans les deux branches circulaires, puisque sa direction sera partout perpendiculaire à celle de ces branches Donc pour qu'il y eût équilibre, il faudrait que les efforts des deux petits cylindres *ac*, *bd* fussent les



mêmes; or cette condition demanderait que la pesanteur en *a* fût la même qu'en *b*, ce qui est contre l'hypothèse, puisqu'elle ne doit pas être la même a la même distance. Donc dans toutes les hypotheses où la gravite tendra vers un centre sans dépendre uniquement de la distance à ce centre, il ne pourra jamais y avoir de fluide en equilibre.

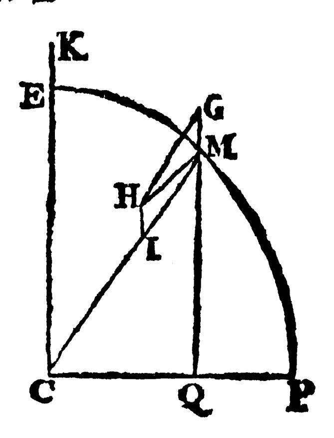
§ XV.

Voyons présentement si dans ces hypothèses, les deux principes ordinaires, c'est-à-dire l'équilibre des colonnes, et la perpendicularité de la pesanteur à la surface, ne pourraient pas s'accorder à donner la même figure au sphéroïde; soient *PME* un sphéroïde pris à volonté, *C* son centre, *P* le pôle, etc.; *EK* une ligne exprimant la force centrifuge en *E*: en prenant *MG* à *EK*, comme l'ordonnée *QM* au rayon de l'équateur *CE*, *MG* exprimera la force centrifuge en *M* puisque toutes les parties tournent dans le même temps.



Cela posé, qu'on tire le rayon *MC*, et la perpendiculaire *MH* à la courbe en *M*, qu'on mène ensuite *GH* parallèle à *MC*, et que du point *H* où cette droite rencontre *MH*, on tire *HI* parallèle

à *MG* ; il est certain que *MI* exprimera la force centrale qui doit être en *M*, pour que le principe de M. Huygens soit observé dans le sphéroïde *PME*.



Si on voulait présentement que la pesanteur vers le centre ne dépendît que de la distance, la relation entre la gravité et la distance serait donnée, puisque cette relation serait celle qu'il y aurait entre *MI* et *MC*. Mais si on veut que la pesanteur ne dépende pas simplement de la distance, qu'elle dépende encore de l'angle *MCP*, ou de toute autre quantité; il est clair qu'on pourra varier d'une infinité de manières la loi de la gravité de *C* en *M*, et conserver cependant le même poids dans la colonne *CM*. Cependant on vient de voir dans le § précédent, qu'il ne pouvait jamais y avoir d'équilibre dans les parties d'un fluide, lorsque la gravité poussant vers un centre, dépendait d'autres quantités que de la

distance à ce centre. Voilà donc une infinité de cas où l'accord des deux principes ordinaires n'assure rien, ce qui montre qu'on avait besoin d'un principe aussi général que celui du chapitre premier.

CHAPITRE IV.

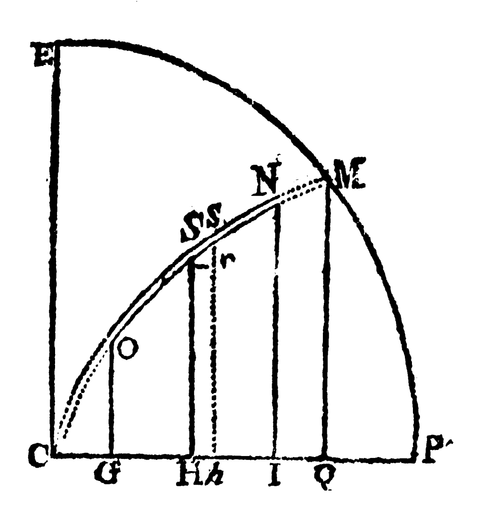
Manière générale de faire usage du principe de l'equilibre des canaux de figure quelconque.

§ XVI.

LA loi suivant laquelle la gravité agit sur toutes les parties d'une masse fluide qui tourne autour de son axe étant donnée, trouver si cette masse peut avoir une forme qu'elle garde constamment.

On sait par le § VIII, qu'afin qu'une masse de fluide puisse prendre une forme constante, il faut qu'un canal quelconque rentrant en lui-même, et placé dans le plan du méridien, soit en équi-

libre indépendamment de la force centrifuge, ou, ce qui revient au même, il faut qu'en calculant la somme des efforts de la gravité sur un canal quelconque *ON*, on ait la même quantité que si on avait pris tout autre canal, qui passerait par les mêmes points *O*, *N*.



Pour employer ce principe, on prendra à volonté dans le canal *ON*, deux points infiniment proches *S* *s*, et on abaissera de ces points à l'axe *CP* les perpendiculaires *SH*, *sh*; on mènera *Sr* parallèle à l'axe, et l'on imaginera que la force de la gravité en chaque point *S* ait été décomposée en deux

autres forces, dont l'une agisse perpendiculairement à l'axe CP, et l'autre parallèlement au même axe :

on fera ensuite.......... $CH = x$

$HS = y$

$Sr = dx$

$sr = dy$

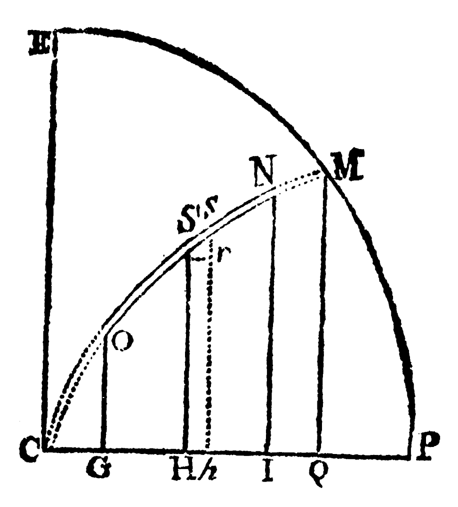
la force perpendiculaire à CP... $= P$

la force parallèle à CP......... $= Q$.

Cela fait, on cherchera l'effort que la force P fera faire au cylindre Ss pour sortir vers O, et on trouvera facilement que l'expression de cet effort sera Pdy ; car la force P agissant suivant SH, la partie de cette force qui agira dans la direction du canal Ss sera $\frac{P \times rs}{Ss}$; or multipliant cette quantité par la masse, on aura $P \times sr$ ou Pdy.

On cherchera ensuite l'effort que la force Q fera faire au cylindre Ss vers le même côté O, et l'on aura de la même manière Qdx pour la valeur de cet effort. Donc $Pdy + Qdx$ sera l'effort total du petit cylindre Ss en vertu des deux forces, ou, ce qui revient au

même, en vertu de la gravité qui avait été décomposée en ces deux forces.



Si on voulait présentement faire usage de cette quantité, pour trouver en termes finis la valeur du poids du canal ON, en supposant que la courbure de ce canal fût donnée par une équation entre x et y, on commencerait par faire évanouir y et dy de $Pdy + Qdx$; cette différentielle n'ayant plus que des x et des dx, on l'intégrerait en observant de compléter l'intégrale, c'est-à-dire d'ajouter la constante nécessaire, afin que le poids fût nul, lorsque x serait égal à CG; on ferait ensuite $x = CI$, et l'on aurait le poids total de ON. Mais

comme l'équilibre du fluide demande que le poids de ON ne dépende pas de la courbure de OSN, c'est-à-dire de la valeur particulière de y en x, il faut donc que $Pdy + Qdx$ puisse s'intégrer sans connaître la valeur de x, c'est-à-dire qu'*il faut que* Pdy + Qdx *soit une différentielle complète* (*), *afin qu'il puisse y avoir équilibre dans le fluide.*

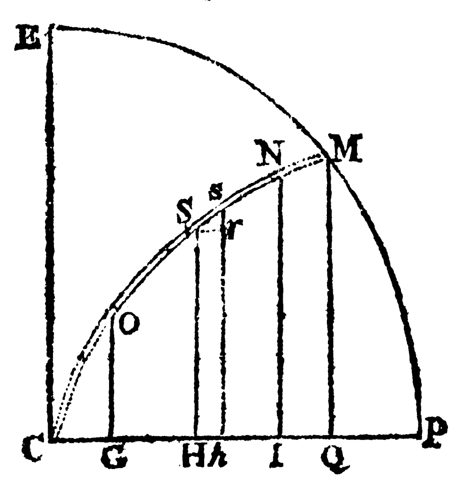
§ XVII.

Lorsque les expressions des forces P et Q seront assez composées pour qu'on ne reconnaisse pas facilement si $Pdy + Qdx$ est une différentielle com-

---

(*) J'entends par différentielle complète, une quantité qui a pour intégrale une fonction de x et de y. $ydx + xdy$, $\frac{ydx + xdy}{2\sqrt{(aa + xy)}}$ sont des différentielles complètes, parce qu'elles ont pour intégrales xy, $\sqrt{(aa+xy)}$. $\frac{xdy - ydx}{xx+yy}$ est aussi une différentielle complète, parce que son intégrale est représentée par l'arc dont la tangente est $\frac{y}{x}$, le rayon étant 1. Mais $y^3dx + x^2dy$, $yydx + xxdy$, ne sont pas des différentielles complètes, parce qu'aucunes fonctions de x et de y n'en sauraient être les intégrales.

plète, il faudra se servir du théorème que j'ai donné dans mon Mémoire (*) sur le Calcul intégral, c'est-à-dire qu'il faudra voir si $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy}$ (**). Toutes les fois



que cette équation aura lieu, on sera sûr qu'il y aura équilibre dans le fluide.

§ XVIII.

Les mêmes choses étant posées que dans le problême précédent, trouver

---

(*) Voyez les Mémoires de l'Académie, année 1740, page 294.

(**) On entend par $\frac{dP}{dx}$ la différentielle de la fonction P, prise en supposant x seulement variable, et dont on a ôté les dx.

l'équation qui exprime le méridien de la masse fluide.

Supposons que CH, x et SH, y, deviennent les coordonnées CQ, et QM du méridien EMP du sphéroïde, il est clair que l'intégrale de $Pdy + Qdx$, complétée de manière qu'elle devienne zéro, lorsque x et y sont zéro, exprimera le poids d'une colonne ou canal quelconque CM qui irait du centre C à la superficie. Il faudra donc que cette intégrale moins la somme des efforts de la force centrifuge sur toutes les parties de la colonne CM, soit une quantité constante. Mais, § V, la somme des efforts centrifuges de CM, est la même que celle de la colonne QM: donc en nommant f la force centrifuge à une distance de l'axe exprimée par r, on aura $\frac{fyy}{2r}$ pour la somme des efforts centrifuges de la colonne CM, et par conséquent l'*équation générale du méridien du sphéroïde* sera

$$\int(Pdy + Qdx) - \frac{fyy}{2r} = A.$$

CHAPITRE V.

Principe général dont l'observation est aussi nécessaire dans les fluides, que l'équilibre des canaux quelconques, avec l'usage de ce nouveau principe pour déterminer les mêmes choses que par le premier.

§ XIX.

J'APPELLERAI *courbe de niveau*, une courbe dans tous les points de laquelle la tangente est perpendiculaire à la direction de la pesanteur ; il en sera de même d'*une surface courbe de niveau*.

§ XX.

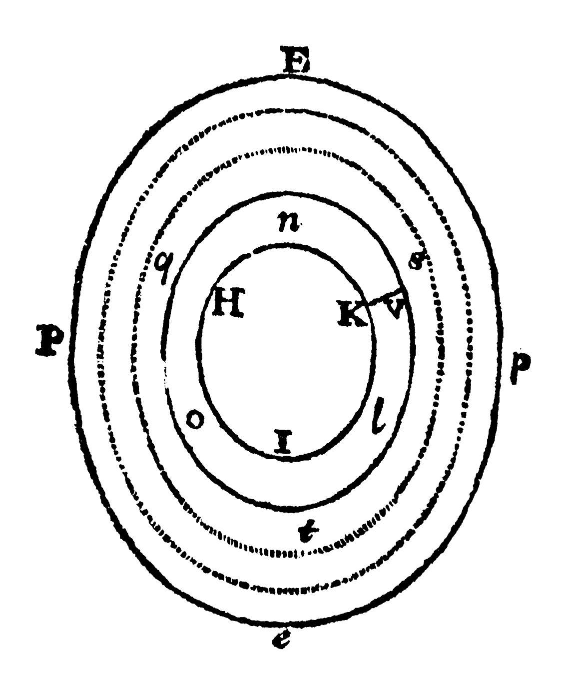
Par *couche de niveau*, j'entendrai l'espace renfermé entre deux surfaces courbes de niveau.

§ XXI.

PRINCIPE GÉNÉRAL.

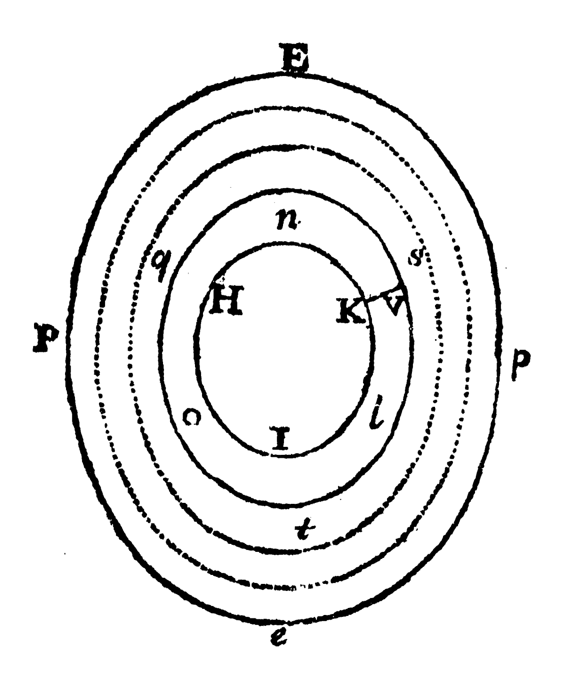
Une masse de fluide EPep, *qu'on imagine partagée en une infinité de couches de niveau, sera en équilibre, si en chaque*

point K d'une de ces couches quelconques, l'épaisseur KV *de la couche est en raison renversée de la pesanteur au même point* K.



Supposons d'abord que la masse de fluide *HKI* soit la seule, et qu'elle soit en équilibre; il est clair par les premiers principes de l'Hydrostatique, que si on presse tous les points de sa surface avec une force égale, l'équilibre n'en sera point troublé. Or si on vient à mettre sur la masse *HKI* la couche *onl* in-

finiment mince, et composée d'une infinité de petits cylindres, dont les hauteurs soient en raison renversée des forces de la pesanteur : la pression causée par ces petits cylindres sera la même,

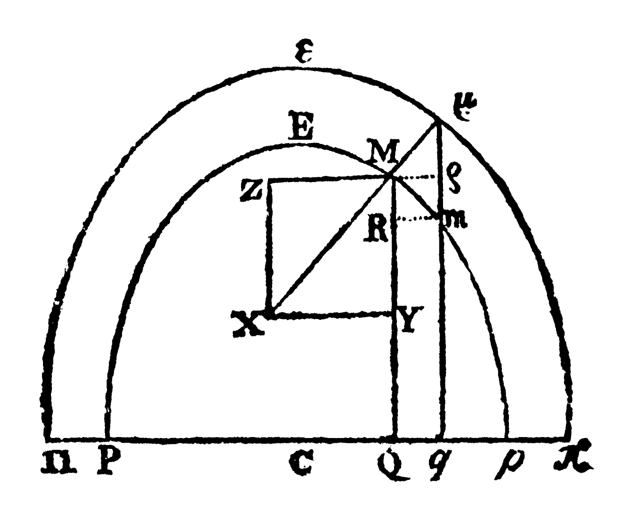


et par l'hypothèse, la surface de la couche *onl* sera de niveau. Donc la masse *onl* sera en équilibre aussi bien que la masse *HKI*, remettant ensuite continuellement d'autres couches *qst*, etc., dans lesquelles on observe les mêmes conditions par rapport à l'épaisseur

qu'elles ont dans chacun de leurs points, on verra que l'équilibre de toute la masse *EPep* ne dépendra que de l'équilibre de la première masse *HKI*; mais comme la masse *HKI* a été prise à volonté, on peut la supposer si petite, qu'elle ne soit plus qu'une particule infiniment petite, qui ne peut pas manquer d'être en équilibre: donc, etc.

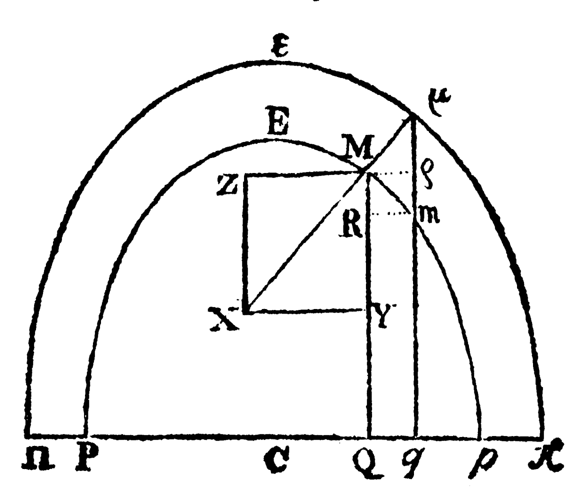
§ XXII.

Supposant que chaque point M *d'une courbe de niveau* PEp *soit poussé par*



deux forces, dont l'une MY *agisse perpendiculairement à l'axe* Pp, *et l'autre*

MZ parallèlement à la même ligne : trouver la relation qui doit être entre ces deux forces, afin que la force composée ou la pesanteur MX qui en résulte, soit en raison renversée de l'épaisseur Mμ de la couche de niveau infiniment mince πΠPEp.



Ayant abaissé de μ la perpendiculaire μq à l'axe Pp, et mené par le point m la parallèle mR au même axe, on nommera

la force	MY	R
	MZ	Q
	CQ	x
	QM	y,

d'où l'on aura

$$Qq = Rm = dx\,,$$
$$MR = \quad -dy\,;$$

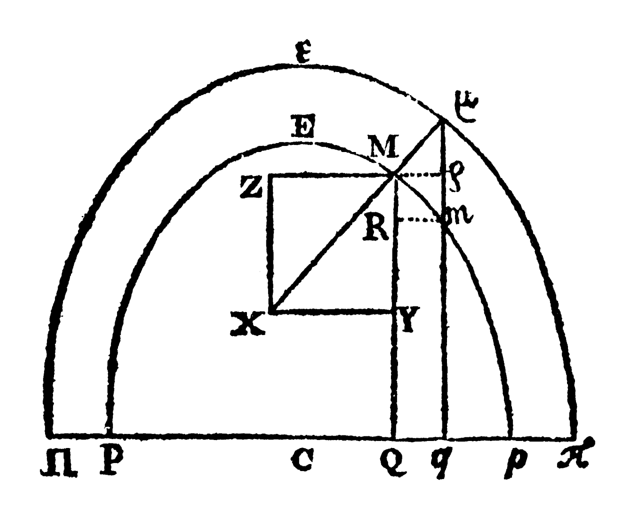
et comme la force MX par les conditions du problème doit être perpendiculaire à Mm, les triangles MXY, MRm seront semblables, ce qui donnera la proportion $Q : R = -dy : dx$, d'où l'on tirera l'equation générale

$$Rdy + Qdx = 0\,,$$

qui sous cette forme appartiendra également à toutes les courbes de niveau, mais qui étant intégrée exprimera, suivant la constante qu'on aura ajoutée, celle des courbes de niveau qu'on voudra.

Supposons maintenant, qu'on eût en effet intégré l'équation $Rdy + Qdx = 0$, et que par l'addition de la constante a, on eût l'équation en termes finis de la courbe PEp; de plus, qu'on eût formé l'équation de la courbe $\Pi\varepsilon\pi$, en mettant dans l'équation intégrée $a + da$ à la place de a. Il est évident qu'on pourrait par ces deux équations, trouver la valeur de l'épaisseur $M\mu$ de la couche

en M; or cette valeur trouvée, il n'y aurait plus qu'a la multiplier par la force MX, et en faire le produit proportionnel à da, puisque ce produit serait le poids de $M\mu$, et que ce poids doit être constant par les conditions du problème.



Mais sans intégrer réellement l'équation $Rdy + Qdx = o$, on va voir qu'on peut, en examinant les opérations qu'on devrait faire pour l'intégrer, trouver la relation entre R et Q, qu'indique cette proportionnalité qui doit être entre le poids de $M\mu$ et da.

Pour cela, imaginons que ω soit la quantité qui, multipliant tous les termes

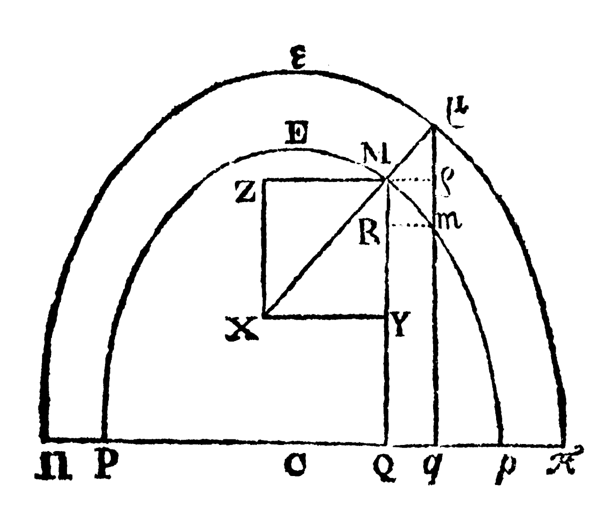
de $Rdy + Qdx$, la rendrait une différentielle complète.

Il est clair que l'intégrale de $\omega Rdy + \omega Qdx$ égalée à une constante a, serait l'équation de la courbe PEp, en supposant que a fût la constante ou paramètre de la courbe PEp; et que la même intégrale égalée à $a + da$, donnerait l'équation de la courbe $\Pi\epsilon\pi$; mais pour pouvoir tirer de ces deux équations la valeur de $M\mu$, ou simplement de $M\rho$, il est évident qu'il faudrait que dans la première de ces deux équations, x et y représentassent CQ et QM, pendant que dans la seconde ils exprimeraient Cq et $q\mu$.

Supposons donc que ces deux équations entre CQ et QM, et entre Cq et $q\mu$, fussent retranchées l'une de l'autre; il est clair que l'équation qui en viendrait serait $\omega Rdy + \omega Qdx = da$, en supposant que dy ne fût plus comme dans le calcul précédent MR, mais $\mu\rho$ différence de MQ a μq.

Si on se rappelle ensuite que μM épaisseur de la couche en M, doit être

perpendiculaire à Mm, et par conséquent le prolongement de MX ; on aura les triangles semblables $M\mu\rho$, MXY qui donneront $\mu\rho = \frac{Rdx}{Q}$.



Substituant cette valeur dans l'équation précédente, on aura $\frac{\omega RR}{Q}dx + \omega Qdx = da$, d'où l'on tirera $dx = \frac{da}{\omega}\left(\frac{Q}{RR+QQ}\right)$, et par conséquent $M\mu = \frac{da}{\omega\sqrt{(RR+QQ)}}$, à cause que les triangles semblables $M\mu\rho$, MXY donnent $XY : XM = M\rho : M\mu$.

Si on multiplie présentement cette valeur $M\mu$ par la force MX, afin d'avoir le poids de $M\mu$, on aura $\frac{da}{\varphi}$ pour la valeur de ce poids. Mais nous avons dit tout-à-l'heure, que ce poids devait être proportionnel à da : donc ω est constant. Donc la différentielle $Rdy + Qdx$ n'a pas besoin de facteur pour être complète, c'est-à-dire qu'il *faut que* Rdy + Qdx *soit la différentielle de quelque fonction de* x *et de* y, *afin que la pression de la couche soit égale en tous ses points, et par conséquent, afin que le sphéroïde soit en équilibre.*

§ XXIII.

Il est clair, que *lorsque* Rdy + Qdx *sera une différentielle complète, son intégrale égalée à une constante sera l'équation du sphéroïde*, puisque la surface du sphéroïde doit être elle-même une surface courbe de niveau.

§ XXIV.

Si on veut comparer cette équation gé-

nérale avec celle que nous avons trouvée dans le chapitre précédent, il faut remarquer que *R* tient ici lieu de $P - \frac{fy}{r}$; car *P* exprimant, § XVI, la partie de la gravité ou de la pesanteur primitive qui agit perpendiculairement à l'axe, il faut en retrancher $\frac{fy}{r}$, c'est-à-dire la force centrifuge, afin d'avoir *R*.

Quant à *Q*, c'est-à-dire à la force qui agit parallélement à l'axe, on voit bien qu'il doit venir pour cette quantité la même chose, soit qu'on décompose la pesanteur primitive, ou qu'on décompose la pesanteur actuelle.

§ XXV.

Liaison nécessaire entre les principes exposés aux § VIII *et* XXI.

Il est aisé de voir, indépendamment du calcul qu'on vient de donner, que le principe employé dans les chapitres précédens, c'est-à-dire l'équilibre des canaux quelconques, ne saurait jamais donner un autre résultat, que le principe de

l'égalité de pression des couches, dont nous venons de faire usage. Car on n'a qu'à prendre pour le canal rentrant en lui-même, l'assemblage de deux branches courbes qui soient deux parties quelconques de deux courbes de niveau voisines, et de deux branches rectilignes perpendiculaires à ces deux courbes, et l'on verra que la liqueur contenue dans les deux branches courbes, ne pesant point à cause du niveau de ces deux branches, il faudra que les deux branches rectilignes soient d'un poids égal, afin que le canal entier soit en équilibre; d'où il suit que l'épaisseur de la couche doit être en raison renversée de la force de la pesanteur.

CHAPITRE VI.

Application de la formule trouvée par les deux principes précédens à plusieurs hypothèses particulières.

§ XXVI.

Lorsque les forces qui poussent vers les deux axes ne dépendent que des distances à ces axes.

Dans tous les cas de cette nature, il est facile de voir que la masse de fluide pourra conserver une forme constante. Si la force qui pousse perpendiculairement à l'axe des x est nommée Y, et que celle qui pousse perpendiculairement à l'axe des y soit appelée X,

$$\int Xdx + \int Ydy - \frac{fyy}{2r} = A$$

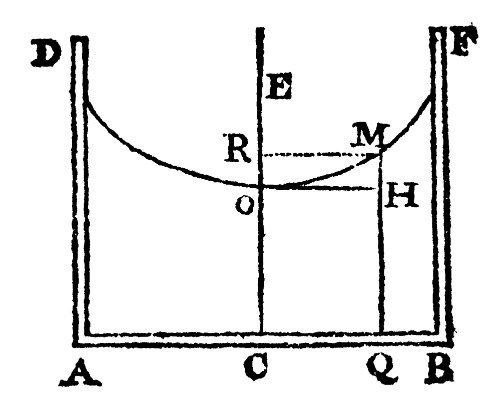
sera l'équation du méridien dans cette hypothèse.

§ XXVII.

Quoique le problème suivant n'appartienne pas directement au sujet que j'ai en-

trepris de traiter dans cet ouvrage, la manière de le résoudre se tire si aisément de ce qui précède, que j'ai cru qu'on me pardonnerait la petite digression que je vais faire.

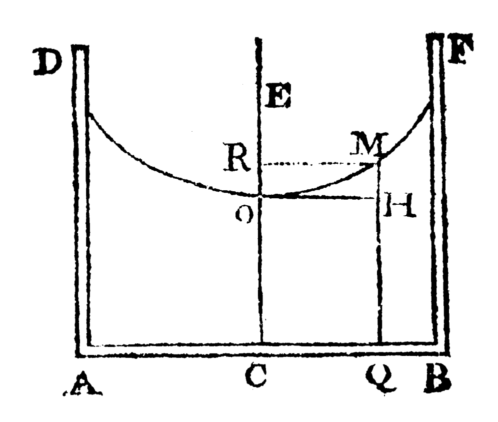
Trouver la courbure OM *que prend la surface de l'eau renfermée dans un vase cylindrique que l'on fait tourner autour de l'axe* CE.



Je remarque d'abord que chaque particule de l'eau est animée de deux forces; l'une constante et verticale est la pesanteur, l'autre variable et horizontale est la force centrifuge qui dépend de la vitesse des parties comparée aux circonférences qu'elles décrivent.

De là, je conclus que la vîtesse des parties étant supposée se conserver, la masse fluide aura toutes ses parties en équilibre, et gardera une forme constante.

Pour trouver ensuite l'équation de la courbe *OM* dont la révolution donne



la surface de l'eau, supposons, pour plus grande généralité, que la vîtesse des parties qui sont à la distance x de l'axe soit représentée par X fonction quelconque de x; la force centrifuge sera par conséquent $\frac{X^2}{x}$, et cette quantité précédée du signe —, exprimera la force que nous avons appelée précédemment Q. Je mets le signe — à cause que

la force Q avait été supposée agir vers l'axe CE.

Quant à la force qui poussait vers BA, comme elle est présentement la pesanteur, nous mettrons simplement une constante p, nous aurons ainsi l'équation $-\frac{X^2 dx}{x} + pdy = 0$, ou

$$dy = \frac{X^2 dx}{px}$$

pour l'équation demandée de la courbe OM.

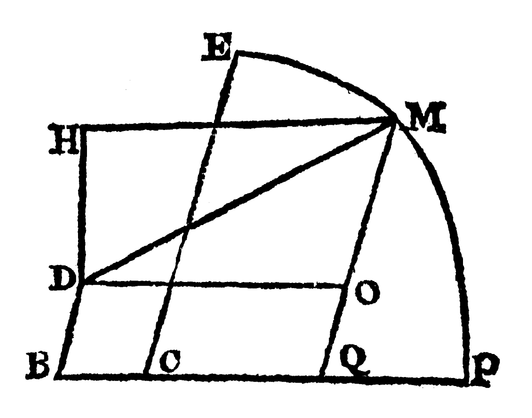
Si on prend la peine de comparer cette solution avec celle (*) du célèbre M. Daniel Bernoulli, on trouvera qu'elles s'accordent. Quant à la solution de M. Herman (**), il n'en est pas de même; mais je crois qu'on peut prouver facilement qu'il s'est trompé, car il égale le poids d'une colonne d'eau MH qui est l'excédant de la colonne MQ par-dessus le niveau, à la force centrifuge en H, au lieu que c'est à la somme des forces centrifuges de HO qu'il faut égaler ce poids.

(*) Pages 244 et 245 de l'Hydrodynamique.

(**) Page 372 de la Phoronomie.

§ XXVIII.

Equation générale des sphéroïdes, lorsque la gravité est composée de l'attraction de tant de centres qu'on voudra.



Soient *CP* l'axe de révolution, *EMP* un des méridiens, *M* un point quelconque de ce méridien, *H* un des centres attractifs qu'on suppose, pour plus grande généralité, placé hors du plan du méridien; *HD* la perpendiculaire abaissée de ce centre sur le plan *DBCPME* du méridien, *DB* la perpendiculaire menée de *D* sur l'axe *BCP*, *CQ* et *QM* les coordonnées de la courbe *EMP* qui répondent au point *M*.

Soient de plus $CQ = x$,
$QM = y$.

L'attraction de M vers $H = \pi (HM)^n$,
la force centrifuge à la distance $r \ldots = f$,
$CB = a$,
$DB = b$,
$DH = c$,

on aura pour la partie de la force de H qui agit suivant la direction MQ,

$$\pi \frac{MO}{MH} (HM)^n,$$

ou, ce qui revient au même, la partie de la force P qui vient du centre H, sera

$$\pi (y - b) [(x + a)^2 + (y - b)^2 + cc]^{\frac{n-1}{2}}$$

De même, la partie de la force de H qui agit parallélement à CP, sera

$$\pi \frac{DO}{MH} (HM)^n,$$

c'est-à-dire que la partie de Q qui vient du centre H, sera

$$\pi (x + a) [(x + a)^2 + (y - b)^2 + cc]^{\frac{n-1}{2}}$$

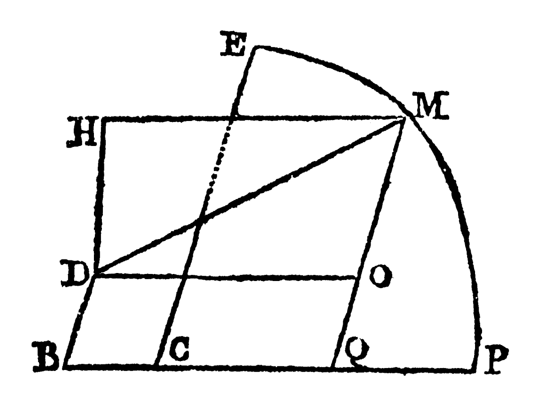
De là il suit que la partie de la quantité $\int (Pdy + Qdx)$ qui vient du centre H,

aura pour valeur

$$\frac{\pi}{n+1}\left[(x+a)^2+(y-b)^2+cc\right]^{\frac{n+1}{2}},$$

ou $$\frac{\pi}{n+1}(HM)^{n+1}.$$

Donc si on imagine autant de centres H, H', H'', etc., qu'on voudra, et que les puissances des distances à ces centres



qui expriment les lois des forces, soient n, n', n'', etc., les intensités étant π, π', π'', etc., on aura

$$\frac{\pi}{n+1}(HM)^{n+1}+\frac{\pi'}{n'+1}(H'M)^{n'+1}$$
$$\frac{\pi''}{n''+1}(H''M)^{n''+1}+\text{etc.}-\frac{fyy}{2r}=A$$

pour l'équation générale du sphéroïde.

Si au lieu de supposer l'attraction des

centres comme une puissance de la distance, on voulait qu'elle fût comme une fonction quelconque; il est clair que le problème serait aussi facile à résoudre.

§ XXIX.

Si on voulait qu'il n'y eût qu'un centre de force, et que ce centre fût placé à l'origine des x, il viendrait

$$\frac{\pi}{n+1}(xx+yy)^{\frac{n+1}{2}}-\frac{fyy}{2r}=A$$

pour l'équation du sphéroïde dans cette hypothèse.

Cette équation est la même que celle que M. de Maupertuis a donnée dans son Discours de la Figure des Astres, p. 152, deuxième édition.

§ XXX.

Si on supposait deux centres, l'un à l'origine des x, l'autre dans l'axe des y, on aurait

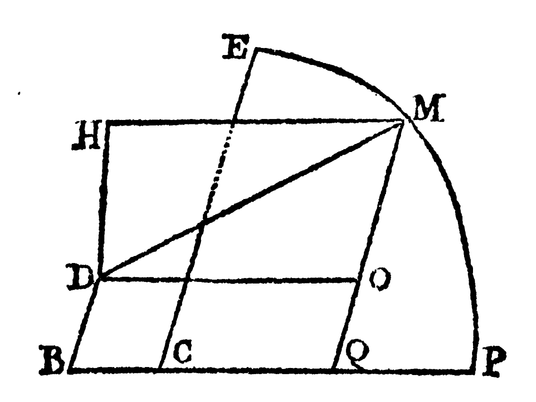
$$\frac{\pi}{n+1}(xx+yy)^{\frac{n+1}{2}}+$$

$$\frac{\pi'}{n'+1}[xx+(y-b)^2]^{\frac{n'+1}{2}}-\frac{fyy}{2r}=A$$

qui revient au même, que l'équation générale des anneaux donnée par M. de Maupertuis, p. 170 de la figure des Astres.

§ XXXI.

Manière d'avoir l'équation du sphéroïde, lorsque la pesanteur est produite par l'attraction d'un noyau central de figure donnée, et d'une densité uniforme.



Dans cette hypothèse, il faudra trouver par les quadratures la somme de toutes les quantités telles que $\frac{\pi}{n+1}(HM)^{n+1}$, ou, ce qui revient au même, la somme de toutes les particules de matière du

noyau donné, multipliées chacune par la puissance $n+1$ de leur distance au point M, appelant cette quantité Z,

$$Z - \frac{fyy}{2r} = A.$$

sera l'équation du sphéroïde.

On trouverait de même l'équation du sphéroïde, si le noyau était composé de couches de différentes densités.

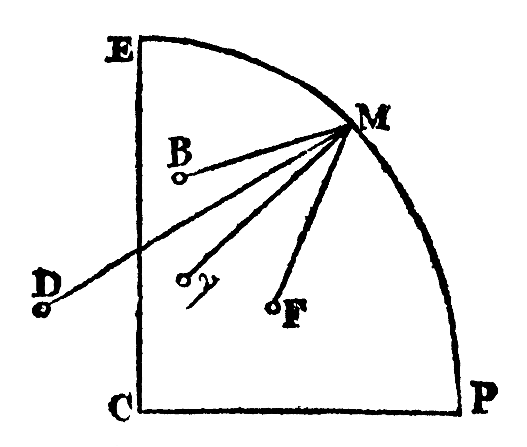
§ XXXII.

Si les parties d'une planète fluide qui tourne autour d'un axe s'attirent mutuellement en raison directe de la simple distance, la figure de cette planète sera celle d'un sphéroïde elliptique.

On pourrait sans un grand calcul tirer la démonstration de cette proposition du § XXVIII; mais pour une plus grande simplicité, on s'y prendra de la manière suivante.

On remarquera d'abord, que si un nombre de corps quelconques B, D, F, etc., attirent un corpuscule M en

raison directe de leurs masses et de leurs distances à ce point M, on pourra substituer à l'attraction de tous ces corps, celle d'une masse égale à $B + D + F +$ etc.



qui serait placée au centre de gravité γ de tous ces corps, et qui agirait comme la distance au point M.

Cela posé, il est clair qu'on peut supposer toutes les particules du sphéroïde, qui par leur attraction produisent la force de la gravité, réunies au centre C de la planète, et alors le problème n'est plus qu'un cas du § XXIX. Il faut faire $n = 1$ dans l'équation générale donnée dans ce paragraphe, et l'on aura

$$\tfrac{1}{2}\pi xx + \tfrac{1}{2}\pi yy - \frac{f}{2r} yy = A,$$

qui donne une ellipse pour le méridien du sphéroïde.

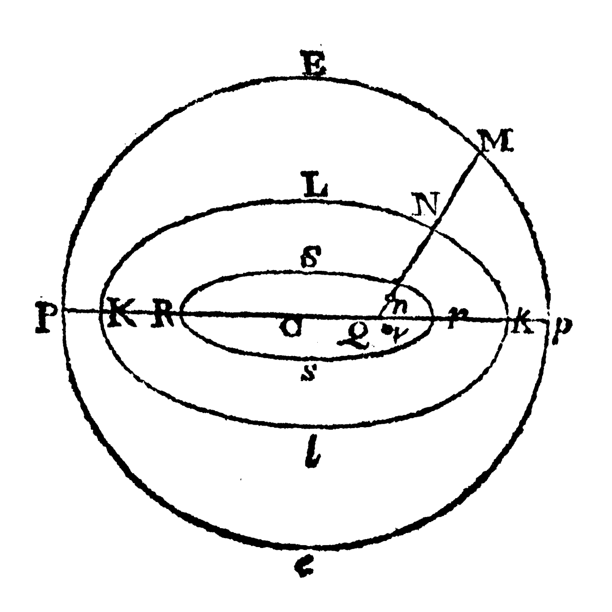
CHAPITRE VII.

Usage du principe de l'équilibre des canaux quelconques dans l'examen des lois de gravité où cette force aurait pour directions les perpendiculaires à une courbe donnée.

§ XXXIII.

Ces hypothèses sont celles que M. Bouguer a choisies dans le Mémoire qu'il a donné à l'Académie, en 1734, intitulé: *Comparaison des deux lois que la Terre et les autres planètes doivent observer dans la figure que la pesanteur leur fait prendre.* Il suppose, la force centrifuge étant mise à part, que tous les graves tendent perpendiculairement à une courbe donnée *KLkl*, et il cherche la loi suivant laquelle la pesanteur doit agir dans les perpendiculaires à cette courbe, afin que le principe de M. Huygens et celui de M. Newton donnent la même

équation, ce qui suffit, suivant lui, pour que le sphéroïde soit en équilibre. Comme par le moyen de ma Théorie on peut déterminer fort simplement tous les cas de ces hypothèses où il peut y avoir équilibre dans les fluides, j'en donnerai ici le détail.



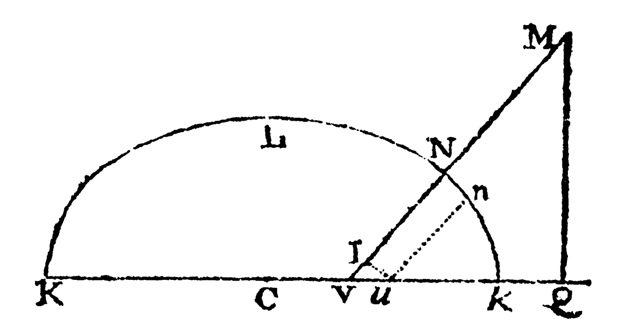
J'observerai d'abord, que pour rendre ces hypothèses naturelles, il faut supposer un noyau solide au-dedans du sphéroïde, qui soit la plus petite *RSrs* des ovales qui ont la même développée que l'ovale *KLkl*. Car si on veut qu'il y ait

du fluide au-dedans de cette ovale, il faudra que ses parties pèsent aussi dans la direction des perpendiculaires *MQ* à la courbe *KLkl*. Soient donc *n* et *ν* deux particules de fluide infiniment proches de l'axe, ces deux particules pèseront suivant des directions qui feront ensemble un angle fini, ce qui est choquant.

Mais qu'il y ait du fluide ou non au-dedans de l'ovale *RSrs*, le calcul sera toujours le même, pour savoir si l'équilibre est possible.

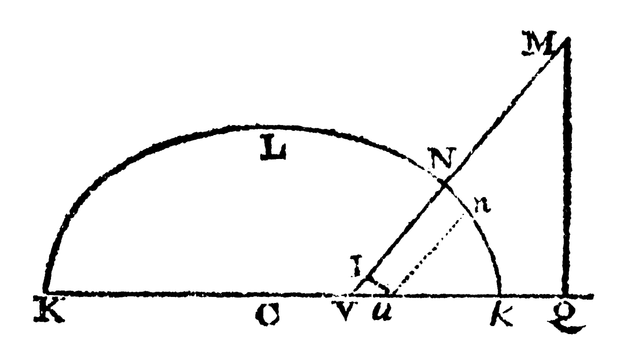
§ XXXIV.

La force de la gravité étant constante, trouver si le fluide peut être en équilibre.



Soit *KLk* la directrice de la gravité, c'est-à-dire la courbe vers laquelle

tous les corps sont poussés perpendiculairement, soit de plus M une particule



quelconque du fluide, et MV la perpendiculaire à la directrice, on fera

$$CQ = x$$
$$QM = y$$
$$CV = z$$

la gravité........ $= p$,

la force vers CQ appelée ci-dessus P, sera

$$\frac{py}{\sqrt{((x-z)^2+yy)}},$$

la force perpendiculaire à CQ, nommée Q, sera

$$\frac{p(x-z)}{\sqrt{((x-z)^2+yy)}}.$$

Donc il faut que

$$\frac{pydy+p(x-z)dx}{\sqrt{((x-z)^2+yy)}}$$

soit la différentielle de quelque fonction, afin que le sphéroïde puisse être en équilibre. Or c'est ce qui ne parait d'abord possible, que dans le cas où z est constant ; c'est-à-dire, lorsque la gravité agit vers un seul point. Cependant avec un peu d'attention, on découvre facilement l'intégrale de la différentielle précédente, par le moyen de la courbe KIk.

Car si on change cette différentielle en celle-ci :

$$pd\sqrt{[(x-z)^2+yy]}+\frac{p(x-z)dz}{\sqrt{(yy+(x-z)^2)}}$$

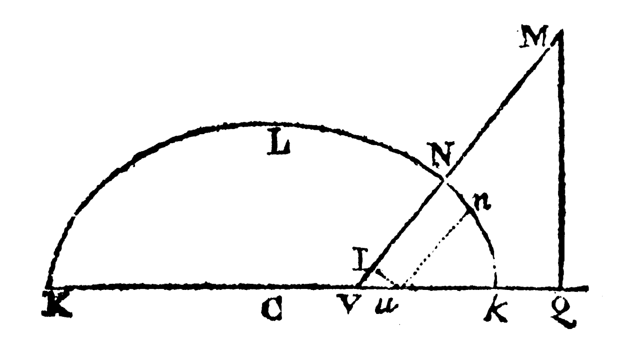
qui lui est égale, on s'apperçoit que la quantité $\frac{x-z}{\sqrt{((x-z)^2+yy)}}$, qui est au second membre, est le sinus de l'angle QMV, on voit ensuite que ce sinus peut s'exprimer par $\frac{IV}{Vu}$, uI étant une perpendiculaire abaissée de u sur MV. Or comme Vu n'est autre chose que dz, la quantité $\frac{(x-z)dz}{\sqrt{(yy+(x-z)^2)}}$ sera donc IV, dont l'intégrale est $-NV+$ une constante A, à cause que CQ augmentant, NV diminue. Donc l'intégrale de la différentielle en

tière $\frac{p(x-z)dx+pydy}{\sqrt{((x-z)^2+yy)}}$ sera $p(MN)+pA$. Donc, dans cette hypothèse, le sphéroïde peut être en équilibre.

§ XXXV.

Lorsque la pesanteur n'est pas constante, déterminer comment elle doit varier pour qu'il y ait équilibre.

$\frac{(x-z)dx+ydy}{\sqrt{((x-z)^2+yy)}}$ sera toujours la différentielle de NM. Si on nomme donc u



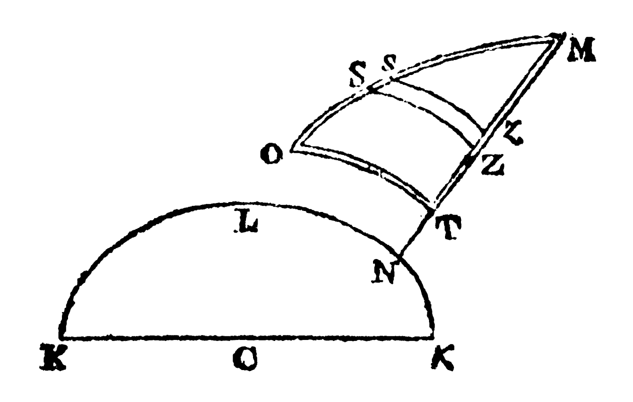
cette droite, et que l'on conserve p pour exprimer la force de la pesanteur, il faudra que pdu soit une différentielle complète, afin qu'il y ait équilibre; mais pour cela, il est évident qu'il faut que p

soit une fonction de u ; donc *la pesanteur doit dépendre simplement de la distance à la directrice, pour que le sphéroïde soit en équilibre.*

§ XXXVI.

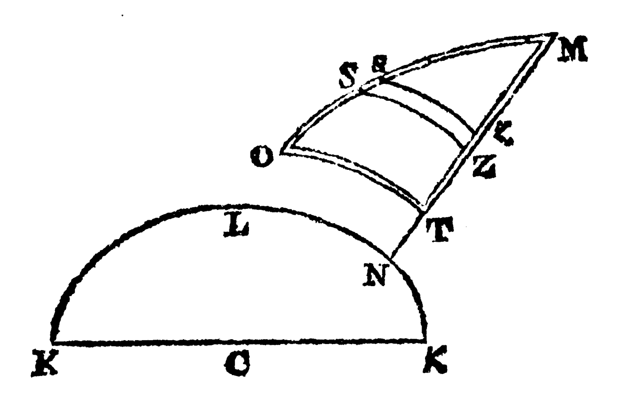
Autre solution des deux problèmes précédens.

Suivant ce qui a été établi dans le § XVI, il faut que la pesanteur d'un canal quelconque *OM* ne dépende uniquement que de la position des points



O, *M*, et nullement de la courbure du canal *OM*; cela posé, soient *MN* une perpendiculaire à la directrice *KLk*, et *OT* une courbe qui a la même développée que *KLk*, il s'agira de prouver

que le poids du canal *OM* est le même que celui du canal *OTM* ; mais le poids de *OT* doit être nul, puisque par l'hypothèse, la pesanteur agit perpendiculairement à la direction de ce canal dans tous ses points. Donc il faut que *OM* et



MT soient en équilibre, ou ce qui revient au même, si on mène les deux courbes quelconques, *SZ*, *sz* infiniment proches l'une de l'autre, et ayant chacune la même développée que *OT*, il faut que le poids *Ss* soit égal à celui de *Zz*. Or ces deux petits cylindres ne sauraient se faire équilibre, que la pesanteur en *S* ne soit égale à celle qui agit en *Z*, c'est-à-dire que cette force ne soit la même à la même distance de la direc-

trice. Donc l'équilibre du sphéroïde demande que la pesanteur soit une fonction de la distance à cette courbe.

§ XXXVII.

De là il suit, que si la pesanteur était le résultat de plusieurs forces qui agissent toutes perpendiculairement à des courbes données, et qui fussent exprimées par des fonctions de la distance à ces courbes, l'équilibre serait encore possible.

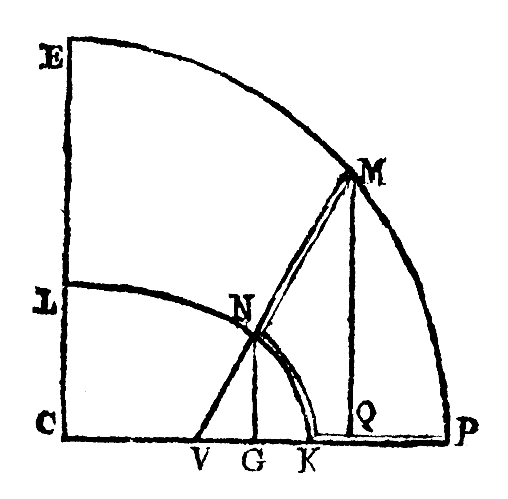
§ XXXVIII.

Trouver l'équation du sphéroïde, lorsque la force de la gravité agit perpendiculairement à une courbe donnée, et est exprimée par une fonction quelconque de la distance à cette courbe.

Soit pris dans une direction perpendiculaire à la courbe donnée, une colonne de fluide MN qui communique avec la colonne KP, répondant au pôle,

par le canal NK placé sur la courbe donnée LNK.

Il est clair que la gravité ne fera point d'effet dans KN, ni la force centrifuge dans KP. Donc il faudra que le poids



de MN moins la force centrifuge de $MN + NK$, ou ce qui revient au même, moins la force centrifuge de QM soit constant.

Qu'on abaisse maintenant NG perpendiculaire à l'axe, et qu'on fasse

$$GN = z$$

$$VN = s$$

$$NM = t$$

la force de la gravité en $M \ldots = T$,
la force centrifuge à la
distance $r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = f$,

On aura......... $QM = (t+s)\frac{z}{s}$,
la force centrifuge
de $QM \ldots\ldots\ldots = \frac{f}{2r}(t+s)^2\frac{zz}{ss}$,

le poids de la colonne $MN = \int Tdt$.
Donc l'équation du sphéroïde sera

$$\int Tdt - \frac{f}{2r}(t+s)^2\frac{zz}{ss} = A,$$

par laquelle on construira aisément le méridien, s étant donné en z par l'équation de la directrice.

§ XXXIX.

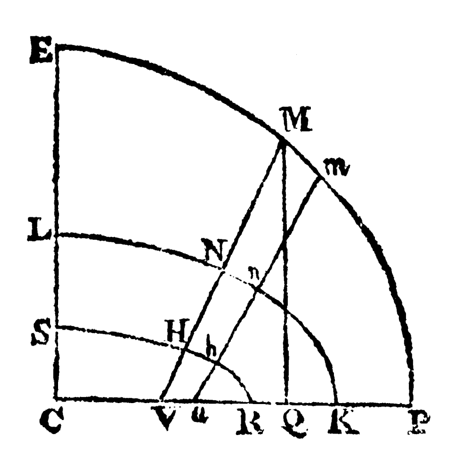
Que la force de la pesanteur soit constante et égale à l'unité, on aura dans ce cas

$$t - \frac{f}{2r}(t+s)^2\frac{zz}{ss} = A$$

pour l'équation du sphéroïde.

§ XL.

Qu'en se servant du principe de Bouguer, on peut croire d'abord que les lois de gravité qu'on vient de choisir, ne peuvent plus s'accorder avec l'équilibre des fluides.



Si on voulait trouver l'équation du sphéroïde précédent, par la méthode de M. Bouguer, qui consiste à rendre égal le poids des colonnes *MV* et *PV*, il y aurait une observation assez délicate à faire, sans laquelle on trouverait une autre équation que par le principe précédent, et par conséquent différente de

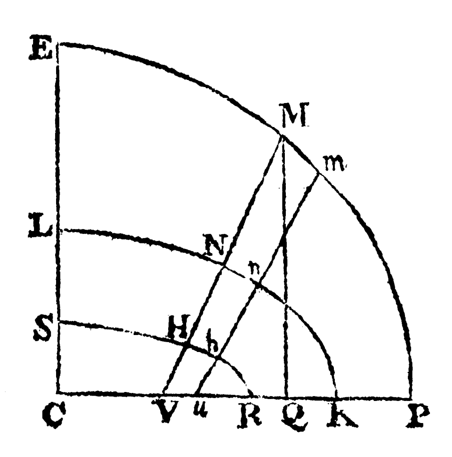
ce que donnerait le principe de M. Huygens. D'où il arriverait qu'une infinité d'hypothèses de gravité sembleraient ne pas s'accorder avec l'équilibre des fluides, quoiqu'elles pussent s'y accorder réellement.

Supposons, par exemple, que la pesanteur soit constante et égale à l'unité : de l'équilibre de *MV* et de *VP*, il paraît s'ensuivre, que le poids *MV*, c'est-à-dire *MV* moins la force centrifuge de *QM* serait égal à *VP*, ce qui donnerait

$$t + s - \frac{f}{2r}(t + s)^2 \frac{zz}{ss} = A + u$$

pour l'équation du sphéroïde, en gardant les mêmes dénominations que dans le problème précédent, et en nommant de plus *KV*, *u*. Or cette équation étant différente de celle qu'on a donnée dans le § précédent, on en conclurait d'abord, que le sphéroïde n'est pas possible. Mais qu'on examine bien ce que demande la loi de gravité qu'on a choisie, on verra qu'il n'est pas permis de supposer le poids de *PV* proportionnel à *PV*, quoique la pesanteur soit constante.

Pour le faire voir, soit *KR* le rayon de la développée de la courbe *KNL*



au point *K* (supposant qu'elle coupe perpendiculairement son axe en *K*) ; la pesanteur de *KR* sera surement exprimée par *KR*, parce que le long de cette ligne on ne peut pas mener d'autre perpendiculaire à la courbe que *KR*. Mais depuis *R* jusqu'en *V*, en *u* par exemple, il est clair que les perpendiculaires *un* à la courbe *KNL*, seront les directions de la pesanteur, pour que l'uniformité soit observée, ou plutôt, pour qu'il n'y ait pas de contradiction dans l'hypothèse. Car on voit bien qu'il serait absurde d'imaginer que *u* pèserait dans la direc-

tion uC en le considérant comme partie de la colonne VP, et qu'il pèserait suivant un lorsqu'il serait supposé dans la colonne unm : or dès qu'on supposera, comme on le doit, que les particules de VR pèsent dans les directions VN, un, etc. perpendiculaires à la courbe LNK, on verra que le poids de VR sera le même que celui de VH, SHR étant une courbe qui a la même développée que LNK. Donc le poids de KV sera NV, et non pas KV. Avec cette attention, on aura pour l'équation du sphéroïde

$$o\ t+s-\frac{f}{2r}(t+s)^2\frac{zz}{ss}=A+s,$$

ou

$$t-\frac{f}{2r}(t+s)^2\frac{zz}{ss}=A,$$

qui est la même que celle du § précédent.

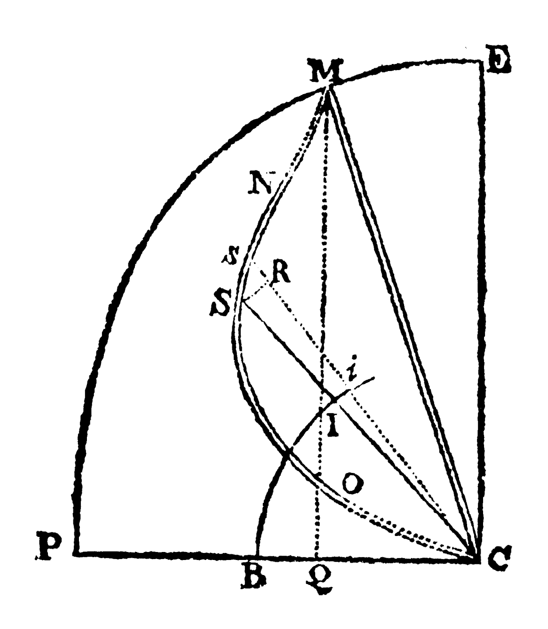
CHAPITRE VIII.

Autres manières d'employer le principe de l'équilibre des canaux quelconques, dans la recherche des figures des Planètes.

J'AI donné dans les chapitres V et VI une méthode générale, pour connaître si une loi quelconque de gravité pouvait convenir à l'équilibre des fluides, mais si cette méthode a l'avantage de la généralité, elle n'a pas toujours celui de la simplicité; on en a vu des exemples dans le chapitre II et dans le précédent, où il a été bien plus commode d'employer la gravité dans sa direction naturelle, que de la décomposer en deux forces perpendiculaires aux deux axes. Voici encore des cas de la même nature, par l'examen desquels on parviendra facilement à trouver la méthode la plus courte qu'on doive suivre dans chaque cas particulier.

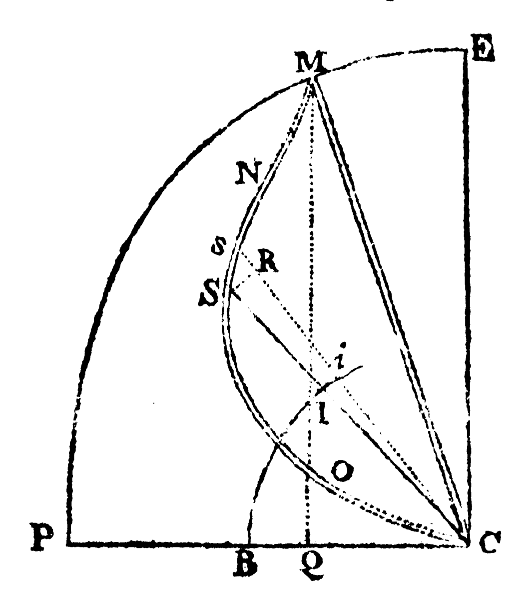
§ XLI.

Trouver les conditions nécessaires pour l'équilibre des fluides, lorsque la pesanteur et sa direction sont données par des quantités composées du rayon, et de l'angle du rayon avec l'axe.



Soient *PE* le sphéroïde, et *NO* un canal quelconque pris dans l'intérieur. Que la force à chaque point *S* soit décomposée en deux autres, l'une vers le centre fixe *C*, l'autre suivant *SR* perpendiculaire à *SC*. Soient de plus

$CB = 1$,
l'arc $BI = x$,
$CS = y$,
$Ii = dx$,
$SR = ydx$,
$sR = dy$,
la force centrale............ $= P$,
celle qui tire perpend. à $CS = Q$.
Le poids du petit cylindre Ss animé par ces deux forces; sera $Pdy + yQdx$,



puisqu'il doit être égal à celui de deux cylindres SR, Rs. Or l'intégrale de cette différentielle doit être une quantité qui ne dépende point de l'équation particu-

lière de la courbe *ON*; donc en se servant des mêmes raisonnemens employés au § XVI, *il faudra que* Pdy + Qydx *soit une différentielle complète, afin que le sphéroïde soit possible.* D'où l'on a la relation qui doit être entre les forces *P* et *Q*.

§ XLII.

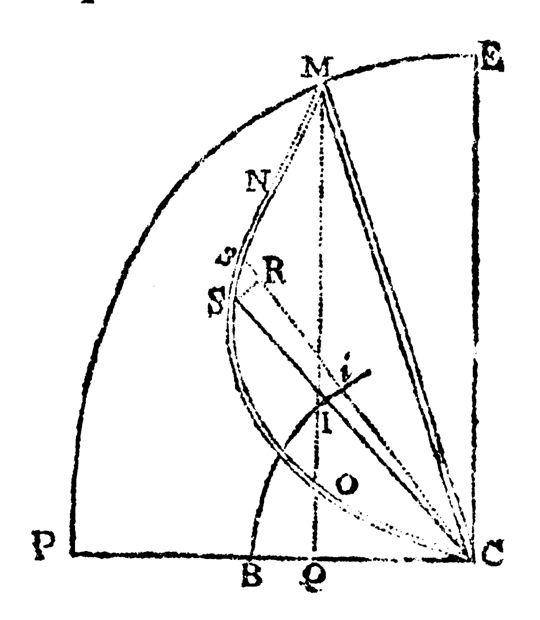
Si on ne reconnaissait pas facilement que $Pdy + Qydx$ fût une différentielle complète, on n'aurait qu'à examiner si $\frac{dP}{dx} = \frac{d(Qy)}{dy}$.

§ XLIII.

Trouver l'équation générale des sphéroïdes dans l'hypothèse précédente.

Si on suppose que le canal quelconque, dont l'intégrale de $Pdy + Qydx$ exprime le poids, s'étende depuis le centre *C* jusqu'à un point quelconque *M* de la superficie, et qu'on retranche du poids de ce canal l'effet de la force centrifuge, c'est-à-dire la somme des efforts centrifuges des parties contenues dans la per

pendiculaire MQ à l'axe, le reste devra être une quantité constante :



Faisant donc............ $QM = z$
et la force centrifuge............... $= f$
lorsque la distance à l'axe est.... $= r$
on aura

$$\int (Pdy + Qydx) - \frac{fzz}{2r} = A$$

pour l'équation du sphéroïde.

§ XLIV.

Si la force centrale était exprimée par une fonction quelconque Y de la distance

en centre, et que la force perpendiculaire à cette direction fût exprimée par $\frac{X}{y}$ (X étant une fonction de l'Arc x ou des quantités qui en dépendent); il est évident que l'équilibre serait toujours possible, et que l'équation du sphéroïde serait

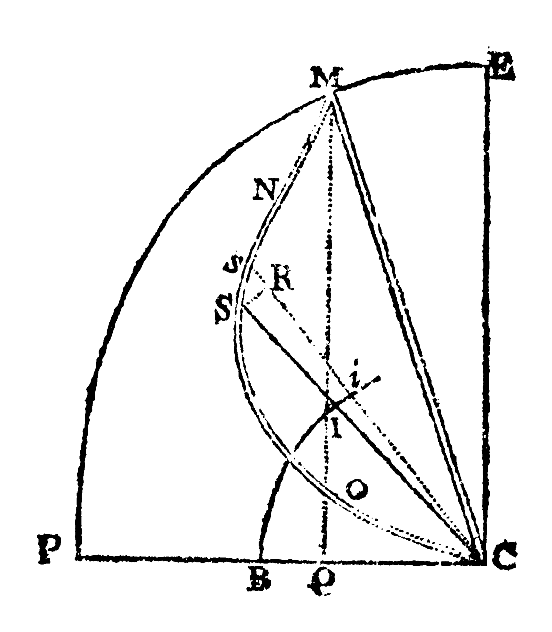
$$\int Xdx + \int Ydy - \frac{fzz}{2r} = A.$$

§ XLV.

Dénouement d'une espèce de paradoxe qui se rencontre dans l'hypothèse précédente.

Supposons qu'on cherchât l'équation du sphéroïde du § précédent, par le principe ordinaire de l'équilibre des colonnes centrales et droites, on trouverait simplement $\int Ydy$ pour le poids de la colonne CM, à cause que la force qui pousse perpendiculairement à CM, ne doit point agir dans cette colonne. Retranchant ensuite de $\int Ydy$, $\frac{fzz}{2r}$ somme des forces centrifuges, on aurait $\int Ydy$

$-\frac{fzz}{2r} = A$ pour l'équation du sphéroïde. Il est vrai qu'on trouverait en même temps que le principe de M. Huygens donnerait $\int Ydy + \int Xdx - \frac{fzz}{2r} = A$; mais ne trouvant point d'erreur dans un raisonnement aussi simple que celui qui



apprend que le poids de CM est $\int Ydy$, que pourrait-on penser alors ? sinon que cette hypothèse de pesanteur ne peut pas convenir à l'équilibre des fluides.

Car, quoique par la solution précé-

dente, on fût assuré que tous les canaux *CONM* de figure quelconque seraient en équilibre, il suffirait que les seules colonnes droites partant du centre, ne fussent pas de même poids, pour détruire l'équilibre général, et par conséquent pour faire renoncer à l'hypothèse qu'on aurait prise.

Abandonnant cette hypothèse, on croirait qu'il faudrait, pour en avoir de possibles, que la pesanteur centrale fût composée d'y et d'x, afin qu'alors Pdy intégré seul en faisant x constant, donnât la même quantité que l'intégrale entière $s(Pdy + yQdx)$, lorsque $Pdy + Qydx$ est une différentielle complète.

C'est ainsi qu'il arriverait, si on faisait $P = xxy$ et $Q = xy$, ou $P = \frac{x}{\sqrt{(aa + xy)}}$ et $Q = \frac{1}{\sqrt{(aa + xy)}}$, etc. Mais dans les hypothèses où P est une fonction d'x et d'y, on trouverait encore dans certains cas une difficulté de même nature que celle qui paraît d'abord ne tomber que

sur les cas où P ne contient que la variable y.

Par exemple, que $P = \frac{y}{\surd(xx+yy)}$ et $Q = \frac{x}{y\surd(xx+yy)}$; $Pdy + Qydx$ sera une différentielle complète, qui aura pour intégrale $\surd(xx+yy)$. D'où § XLI, le sphéroïde doit être possible, et avoir pour équation

$$\surd(xx+yy) - \frac{fzz}{2r} = A.$$

Cependant qu'on cherche l'équation du sphéroïde par l'équilibre des colonnes centrales et droites, on trouvera l'équation $\surd(xx+yy) - x - \frac{fzz}{2r} = A$.

Car, puisque la force centrale est $\frac{y}{\surd(xx+yy)}$, le poids d'une colonne quelconque, droite et centrale, sera l'intégrale de $\frac{ydy}{\surd(xx+yy)}$ prise en faisant x constant, c'est-à-dire $\surd(xx+yy) - x$ (où la constante x est retranchée pour

compléter l'intégrale, le poids devant être nul lorsque $y = o$). Retranchant ensuite de cette intégrale la valeur $\frac{fzz}{2r}$ de la somme des forces centrifuges, et égalant le reste à la constante A, on aura $\sqrt{(xx + yy)} - x - \frac{fzz}{2r} = A$ pour l'équation du sphéroïde; or cette équation étant différente de celle que donne l'équilibre des canaux quelconques, on en doit conclure naturellement que l'hypothèse de gravité qui l'a donnée, est encore de celles qui ne conviennent pas à l'équilibre des fluides.

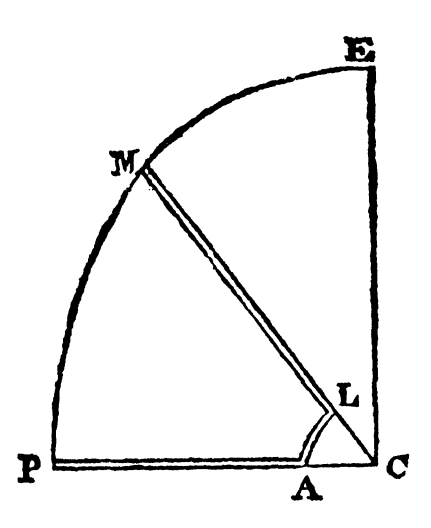
Comme la moindre exception à une règle générale jette des doutes sur tout le reste, à moins qu'on ne voie nettement ce qui peut particulariser les cas où cette règle manque, examinons s'il y a véritablement ici un sujet d'exception, ou bien jusqu'où il peut s'étendre.

Revenons premièrement au cas où la pesanteur centrale dépend d'une fonction de la distance au centre. Quoiqu'en

cherchant la valeur du poids d'une colonne droite qui se termine au centre, rien ne paraisse plus nécessaire que de négliger la force Q qui agit perpendiculairement à la direction de cette colonne; si on remarque cependant que l'expression de cette force $\frac{X}{y}$ devient infinie lorsque $y = o$, on verra que la goutte d'eau qui est en C, a pour se mouvoir circulairement une force qui peut être finie, et que par conséquent le terme $\int Ydy$ n'est pas le seul qu'on doive employer pour exprimer l'effort qui se fait dans la colonne.

Mais afin que cette réponse ne paraisse pas un paradoxe; prenons au lieu des deux colonnes PC, CM, un canal $PALM$ composé de deux colonnes PA, ML et d'un arc de cercle AL décrit du centre C et du rayon donné $CA = a$. Puisque $\frac{X}{a}$ exprime la force qui agit dans le sens de l'arc AL, $\int Xdx$ sera le poids de cet arc. Or comme le rayon CA n'entre point dans cette valeur, il s'en-

suit que le plus petit arc AL pèsera au-

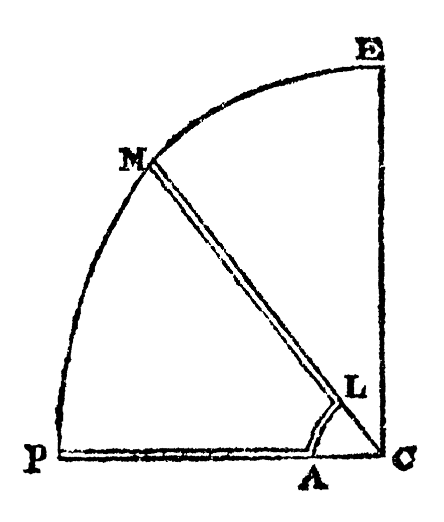


tant que le plus grand, s'il a le même nombre de degrés.

Donc, lorsque cet arc s'anéantit tout-à-fait en C, son poids n'en est pas moins $\int Xdx$. D'où il suit que l'effort total de MC est exprimé par $\int Ydy + \int Xdx - \frac{fzz}{2r}$, et par conséquent que cette quantité égalée à la constante A donne la vraie équation du sphéroïde.

De même, dans l'hypothèse où la force centrale $= \frac{y}{\sqrt{(xx+yy)}}$, et où la force

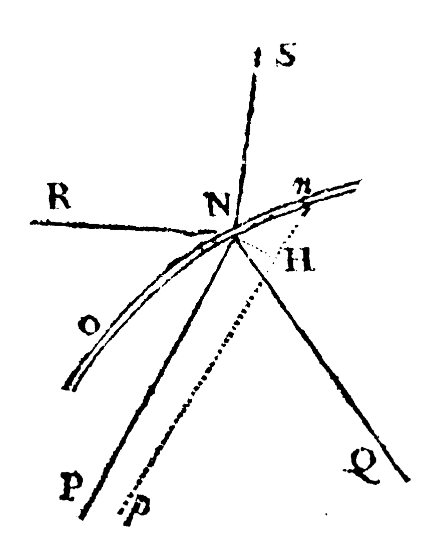
qui agit perpendiculairement au rayon $= \frac{x}{y\sqrt{(xx+yy)}}$, le poids d'un arc *AL* dont le rayon serait *a*, aurait pour valeur $\sqrt{(xx+aa)}-a$. Diminuant ensuite le rayon jusqu'à l'infini, on aurait



alors x pour le poids de l'arc anéanti en *C*, et cette quantité étant ajoutée à $\sqrt{(xx+yy)}-x-\frac{fzz}{2r}$ donnerait toujours l'équation $\sqrt{(xx+yy)}-\frac{fzz}{2r}=A$ pour exprimer le sphéroïde. Voilà donc toutes nos hypothèses rétablies.

§ XLVI.

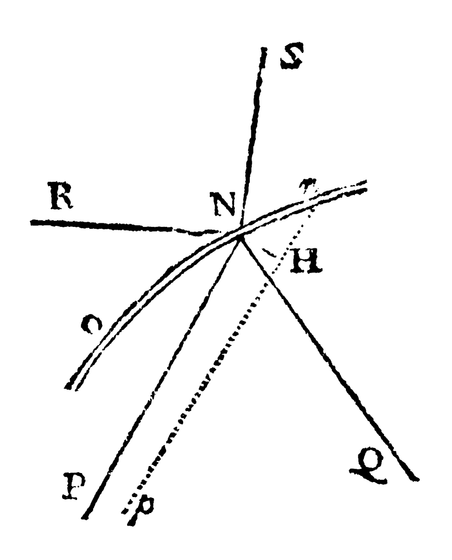
La pesanteur répandue dans toutes les parties d'une masse fluide, étant produite par plusieurs forces quelconques qui agissent suivant des directions données, trouver généralement s'il se peut former un sphéroïde, et quelle sera son équation.



Soient *NO* un canal quelconque, *Nn* un de ses élémens, *NP*, *NQ*, *NR*, *NS* les directions de toutes les forces, et *P*, *Q*,

R, *S*, etc. les fonctions qui expriment ces forces.

Ayant mené par le point *n* la ligne *np*, qui soit la direction de la force *P* au point *n*, on abaissera du point *N* sur *np* la per-



pendiculaire *NH*, et on nommera *dz* la ligne *nH*. On fera ensuite la même opération pour les forces *Q*, *R*, etc., et on nommera *du*, *dt*, etc., les lignes analogues à *nH*; cela fait, on verra facilement, qu'*afin qu'il y ait équilibre dans le sphéroïde, il faut que* $Pdz + Qdu + Rdt + etc$, *soit une différentielle complète.*

Il est à remarquer que la position d'un point quelconque *M* ne dépendant que de deux variables, on ne pourra décider qu'une hypothèse est impossible, que lorsqu'on aura réduit $Pdz + Qdu + Rdt +$ *etc.* à ne renfermer que deux variables, parce que toutes les lettres, z, u, t, etc., et celle qui entreront dans P, Q, R, etc. se réduiront toujours à deux. Mais cette réduction sera inutile, si on apperçoit que $Pdz + Qdu + Rdt +$ *etc.* avec toutes ses variables, est une differentielle complète.

Il est clair que *lorsque* $\mathrm{Pdz + Qdu + Rdt} +$ etc. *sera une différentielle complète, son intégrale égalée à une constante donnera l'équation du sphéroïde.*

On voit bien que si le sphéroïde tourne, la force centrifuge aura dû être comptée au nombre des forces P, Q, R, etc.

CHAPITRE IX.

De l'équilibre des Fluides dont les surfaces peuvent avoir une autre courbure, que celle d'un sphéroïde produit par la révolution d'une courbe autour de son axe.

§ XLVII.

DANS tout ce qui précède, je n'ai point examiné d'autres lois de gravité, que celles dans lesquelles cette force est toujours la même dans tous les points d'un cercle dont le centre est dans l'axe, parce que n'ayant en vue que ce qui concernait la figure des Planètes, c'aurait été donner une généralité superflue au problème, que de choisir des lois dans lesquelles les masses fluides auraient pris d'autres formes que celle de sphéroïde. Cependant, comme la recherche de la figure des Planètes n'est pas la seule question où l'on ait besoin d'étendre les principes or-

dinaires de l'Hydrostatique, et qu'il n'y a que très-peu à ajouter à la théorie précédente, pour la rendre propre aux fluides, dont les parties seraient animées par des forces dont les directions seraient variables de la façon la plus générale; j'ai cru qu'il serait à propos de s'y arrêter ici.

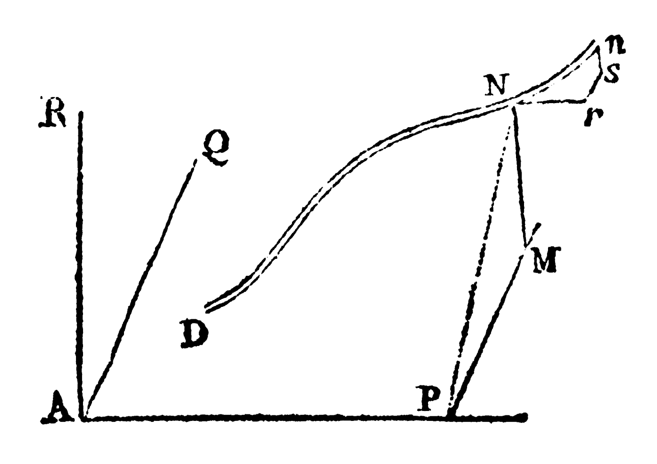
Les questions où la théorie des fluides doit être prise avec cette grande généralité, sont assez intéressantes pour les Physiciens; il s'agira, par exemple, de la cause qui fait monter l'eau dans les tuyaux capillaires, qui y fait au contraire descendre le mercure. On voudra savoir pourquoi les liqueurs qui sont en très-petite quantité ne se mettent pas de niveau, pourquoi elles s'attachent aux bords de certains corps, et qu'elles en fuient d'autres; pourquoi leurs surfaces dans tous ces cas affectent des courbures particulières au lieu d'être planes : et quantité d'autres phénomènes de même nature. On sent bien que l'explication de ces phénomènes ne peut pas être complète sans une théorie des fluides prise en général. Car on doit supposer, ce me semble, que les lois

d'hydrostatique s'observent dans la plus petite goutte d'eau, comme dans la masse la plus considérable. Si donc une partie d'un fluide est plus haute que les autres, que sa surface ne soit pas celle d'un plan horizontal, etc., il faut qu'il y ait une autre force que la gravité qui anime les globules de cette partie, et qui les fasse tendre suivant une autre direction que celles de tous les corps pesans; et comme la courbure de la surface de ces petites masses fluides dépend de celles des corps qu'elles touchent, la question ne saurait être traitée généralement, qu'on n'examine les conditions qui déterminent l'équilibre d'un fluide, dont toutes les parties sont animées par des forces qui ont des directions quelconques, c'est ce que nous ferons ainsi.

§ XLVIII.

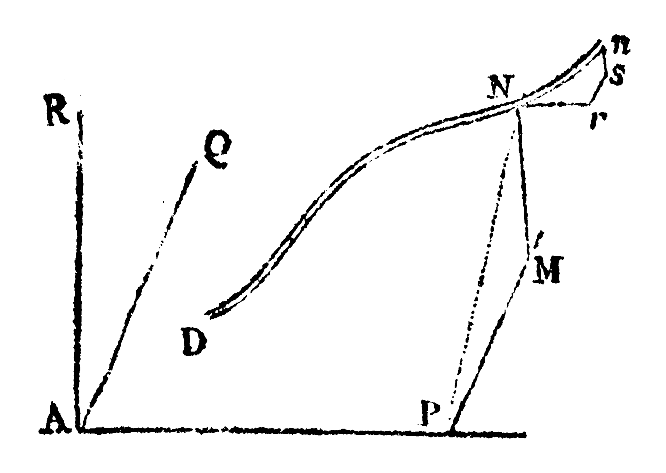
Supposant que la force qui anime les particules d'un fluide ait été décomposée en trois autres, dont la première agisse perpendiculairement à un plan QAP, *et la seconde et la troisième suivant des*

directions paralléles à deux lignes QA, AP de ce plan qui font un angle droit entre elles; on demande quelle relation doit être entre ces trois forces, pour que l'équilibre soit possible dans le Fluide.



Par le § III la masse fluide ne saurait être en équilibre, qu'un canal quelconque rentrant on lui-même ne soit en équilibre, ou, ce qui revient au même, que le poids d'un canal quelconque *DN* ne soit le même que celui de tout autre canal qui passerait par les mêmes points *D*, *N*. Il ne s'agit donc plus que d'exprimer cette condition; on suivra, pour cela, la même

méthode que dans le § XVI, c'est-à-dire qu'on fera ensorte que la somme des poids de tous les petits cylindres *Nn* compris dans le canal *DN*, soit exprimée par une



fonction des trois coordonnées de la courbe à double courbure *DN* qui ne dépende point de la nature de cette courbe.

Ayant abaissé *NM* perpendiculairement au plan *QAP*, *MP* perpendiculaire à *AP*, et mené les trois parallèles *ns*, *sr*, *rN* aux trois coordonnées *NM*, *MP*, *AP*, on fera

$AP = x$

$PM = y$

$MN = z$
$Nr = dx$
$sr = dy$
$sn = dz$

la force suivant NM . . . . $= P$
la force parallèle à MP . . . . $= Q$
la force parallèle à PA . . . . $= R$.

Multipliant ensuite le petit cylindre Nn par chacune des trois forces que l'on a, en décomposant les trois forces précédentes suivant la direction Nn, on aura pour le poids de ce petit cylindre $Pdz + Qdy + Rdx$, et par conséquent, l'intégrale de cette quantité pour le poids du canal DN. Or il est évident par les mêmes raisonnemens qu'on a employés au § XVI, qu'afin que cette intégrale ne dépende point de la courbure particuliere de DN, il faut que $Pdz + Qdy + Rdx$ soit la différentielle complète de quelque fonction de x, y, z, algébrique ou dépendante des quadratures.

§ XLIX.

On pourrait encore déterminer la relation que doivent avoir entre elles les trois

forces P, Q, R, en se servant du principe exposé dans le § XXI, qui consiste dans l'égalité de la pression des couches de niveau, et on arriveroit au même résultat que par la méthode précédente.

§ L.

Lorsqu'on n'appercevra pas à la première inspection, si la quantité $Pdz + Qdy + Rdx$ est une différentielle complète, on se servira de la méthode que j'ai donnée dans les Mémoires de (*) l'Académie, c'est-à-dire qu'on verra si

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dz}, \frac{dP}{dx} = \frac{dR}{dz}, \frac{dQ}{dx} = \frac{dR}{dy}.$$

§ LI.

Lorsqu'on aura reconnu que $Pdz + Qdy + Rdx$ est une différentielle complète, on n'aura qu'à en prendre l'intégrale et

(*) Année 1740, p. 304

l'égaler à une constante, pour avoir l'équation de la surface de la masse fluide dont les parties sont sollicitées par les forces P, Q, R: la raison en est évidente, puisque l'équilibre de la masse fluide demande que tous les canaux qui partent d'un même point et qui aboutissent à la surface, soient d'un poids égal.

§ LII.

Si la masse de fluide dont les parties sont animées par les forces P. Q, R, tournait autour de l'axe des x, on trouverait facilement par les raisonnemens employés § XVIII, que

$$\int(Pdz + Qdy + Rdx) - \frac{f}{2r}(yy + zz) = A$$

serait l'equation de la surface qu'elle devrait avoir pour être en équilibre pendant cette rotation: f étant la force centrifuge à la distance r de l'axe de révolution.

§ LIII.

On pourrait d'abord être étonné qu'une masse de fluide pût tourner autour d'un axe, sans affecter la forme d'un solide de circonvolution, à cause qu'il semble que l'effet de la rotation soit de ranger toutes les parties du fluide dans des cercles: cependant, si on se rappelle ce qui a été expliqué dans l'Introduction, on verra que tout ce que cause la rotation, c'est d'introduire une force qui écarte de l'axe, et que cette force combinée avec les forces P, Q, R, ne doit pas produire une pesanteur dont la direction soit la même dans tous les points d'un cercle qui ait son centre dans l'axe de rotation, condition nécessaire pour qu'une masse de fluide prenne la forme d'un solide de circonvolution.

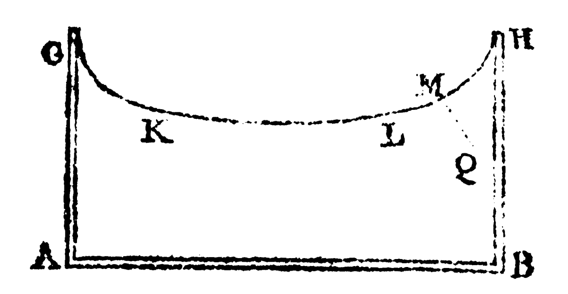
§ LIV.

Toutes les particules d'une masse fluide peuvent être en équilibre entre elles,

dans l'hypothèse où la force qui les anime est composée de la somme de toutes les attractions qu'elles exercent les unes sur les autres, de la force de la pesanteur, et de l'attraction d'un corps quelconque qui touche cette masse fluide.

La méthode précédente est suffisante pour déterminer s'il peut y avoir équilibre dans une masse fluide, lorsque la force qui agit sur toutes les parties est donnée par une valeur algébrique, ou que cette valeur peut être trouvée par les quadratures, ainsi qu'il arriverait si cette force dépendait seulement de l'attraction d'un corps de figure donnée. Il n'en serait pas de même, si cette force dépendait encore de l'attraction des parties du fluide même, car alors, pour employer cette méthode, il faudrait commencer par connaître la courbure de la surface de ce fluide, ce qui serait extrêmement difficile. Rien cependant n'est si aisé dans cette hypothèse, que de prouver l'équilibre des parties du fluide, si on se sert des mêmes raisonnemens que nous avons employés dans le chapitre II.

Soit *M* un globule quelconque de la surface *KLM* d'une masse de fluide con-



tenue dans un vase, *BH* un des bords de ce vase, ou bien un corps qui y est plongé; sans chercher la nature de cette surface, on doit voir qu'il y a une courbure à lui donner, telle qu'il en résulte, que le globule *M* attiré par trois forces; l'une, la pesanteur; l'autre, l'attraction de la masse du fluide; la troisième, l'attraction du vase, prenne la direction *MQ* perpendiculaire au plan tangent en *M*. Il n'est donc plus question que de savoir si l'équilibre se trouvera dans l'intérieur : or nous avons vu § III, que la question se réduisait à ce qu'un canal quelconque rentrant en lui-même, et placé dans l'intérieur de la masse *AGKLMHB*, fût en équilibre. De plus, par le § IX, on sait que si toutes les par-

ties d'un canal rentrant en lui-même, sont attirées vers un point fixe suivant une fonction de la distance à ce point, le canal sera en équilibre. Donc, considérant comme autant de centres attractifs, tous les atomes dont la masse fluide et le vase sont composés, chacun de ces centres ne troublera point l'équilibre du canal; et quant à la force de la pesanteur, il est bien clair qu'elle ne peut pas non plus troubler l'équilibre; donc le canal et toute la masse fluide seront en équilibre.

CHAPITRE X.

De l'élévation ou de l'abaissement des liqueurs dans les tuyaux capillaires. (*)

§ LV.

De tous les phénomènes dont nous avons parlé § XLVII, le dérangement du niveau

(*) Voyez sur ce sujet la Théorie de M. Laplace, exposée dans le Supplément au 10e Livre de la Mécanique Céleste. (*Note de l'Editeur.*)

dans les tuyaux capillaires, est le seul qui mérite actuellement que nous nous y arrêtions ; car la rondeur des gouttes de fluide la concavité de la surface de l'eau auprès du verre, la convexité du mercure, etc. sont si aisées à expliquer par le moyen de l'attraction, qu'il suffit pour cela de relire ce qu'on a dit dans le § LIV.

Ceux qui voudront être instruits des faits les plus curieux que l'on a découverts au sujet des tuyaux capillaires, n'auront qu'a lire l'excellente Dissertation qu'en a donnée M. Jurin dans les Transactions Philosophiques ; ils y trouveront un choix ingénieux d'expériences faites pour remonter à la cause de ces phénomènes. Mais quoiqu'il y ait beaucoup à profiter dans la lecture de cette pièce, j'avoue que je n'ai pas pu être satisfait de la théorie que M. Jurin y donne, et que j'ai cru que l'examen de cette question demandait plus de principes que cet Auteur n'en a employés.

§ LVI.

L'article de son Mémoire qui m'a fait penser ainsi, est celui où il réfute M. Hauksbée qui rapporte l'élévation de la colonne d'eau qui est dans le tuyau capillaire, à l'attraction de toute la surface du verre touchée par cette eau. M. Jurin établit, au contraire, que c'est à la seule petite partie annulaire du tube qui est au-dessus de cette eau, qu'il faut attribuer la suspension. Pour le prouver, il commence par remarquer d'après l'expérience, que la hauteur de l'eau élevée dans le tube, est toujours en raison renversée du diamètre du tube. De là il s'ensuit que la surface intérieure du tube touchée par l'eau est de même étendue dans tous les cas; et comme, au contraire, le poids de l'eau élevée est en raison du diamètre, M Jurin conclut que ce ne peut pas être par l'attraction de la surface que l'eau soit élevée, puisqu'une cause constante produirait un effet variable; il attribue ensuite la

suspension de cette eau à l'attraction de cette espèce d'anneau de verre qui est au-dessus de l'eau, parce que la circonférence, ou plutôt la petite surface de cet anneau se trouve proportionnelle à la quantité d'eau élevée.

§ LVII.

Voici présentement ce que j'objecte à ce raisonnement; c'est 1° qu'on ne saurait employer le principe que les effets sont proportionnels aux causes, que quand on remonte à une cause première et unique, et non lorsqu'on examine un effet résultant de la combinaison de plusieurs causes particulières qu'on n'évalue pas chacune séparément. Or quand on compare l'élévation de l'eau dans deux tubes différens, l'attraction de chaque surface est le résultat de toutes les attractions de chaque particule de verre sur toutes celles de l'eau, et comme toutes les petites forces qui composent la force totale d'une de ces surfaces ne sont pas égales entre elles.

on n'a aucune raison pour conclure l'égalité d'attraction de deux surfaces de l'égalité de l'étendue de ces surfaces; il faudrait, de plus, que ces surfaces fussent pareilles. Par la même raison, quand même on admettrait que le seul anneau de verre qui est au-dessus de l'eau, serait la cause de l'élévation de l'eau; on n'en saurait conclure que le poids élevé devrait être proportionnel à ce diamètre, parce qu'on ne peut connaître la force de cet anneau qu'en sommant celle de toutes ses parties.

2°. Supposé qu'on eût trouvé que la force d'un anneau de verre fût en raison constante avec son diamètre, on n'en pourrait pas conclure qu'une colonne de fluide d'un poids proportionnel à cette force serait suspendue par son moyen. On voit bien qu'un corps solide tiré en en haut par une force égale à son poids, ne saurait tomber. Mais si ce corps est fluide, ses parties étant détachées les unes des autres, il faut faire voir qu'elles se soutiennent mutuellement. Je vais donc examiner la

question des tuyaux capillaires par les lois générales de l'équilibre des fluides.

§ LVIII.

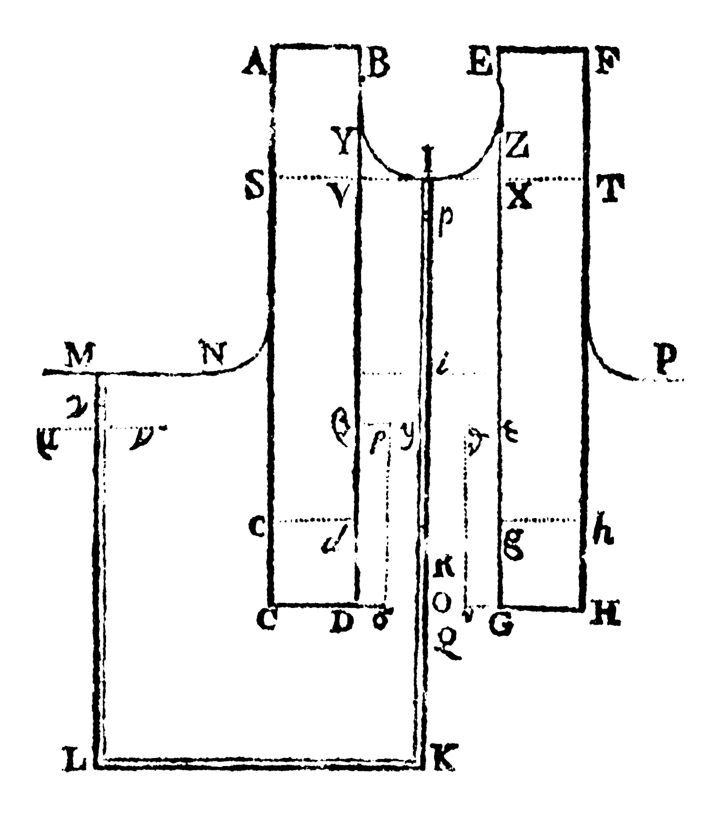
Dans cette recherche, je regarderai les particules du fluide comme infiniment lisses et infiniment petites par rapport au diamètre du tube, je supposerai la matière de ce tube parfaitement homogène, et sa surface infiniment polie De plus, je prendrai la même fonction de la distance pour exprimer tant l'attraction de la matière du tuyau, que l'attraction des parties du fluide, ne distinguant ces attractions que par les coefficiens ou intensités.

§ LIX.

Examen des forces qui soutiennent l'eau dans les tuyaux capillaires.

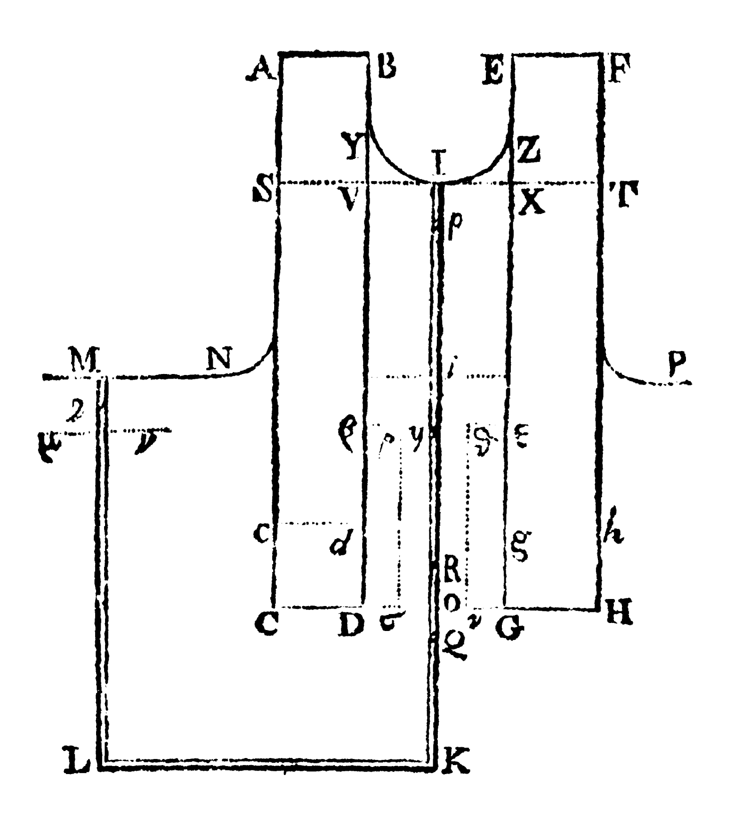
Soient *ABCDEFGH* la tranche du tuyau capillaire par un plan qui passe par l'axe, *MNP* le niveau de l'eau dans la-

quelle il est enfoncé, *Ii* la hauteur où cette liqueur est élevée dans le tuyau, *YIZ* la petite courbe concave que l'attraction du verre fait prendre à l'eau ; de plus que *IKLM* représente un canal in-



finiment étroit, dont les deux branches *IK* et *ML* soient verticales, et la branche *LK* horizontale ; la première placée dans l'axe même du tube, la seconde et la troi-

sième placées assez loin du verre, pour que l'attraction en soit insensible. Je vais chercher quelles sont les forces qui agissent sur les parties de *ML* et de *IK*, afin



de voir si les colonnes peuvent être en équilibre, quoiqu'elles soient d'inégale longueur.

Pour y parvenir, je commence par faire le rayon intérieur du tube . . . . = *b*

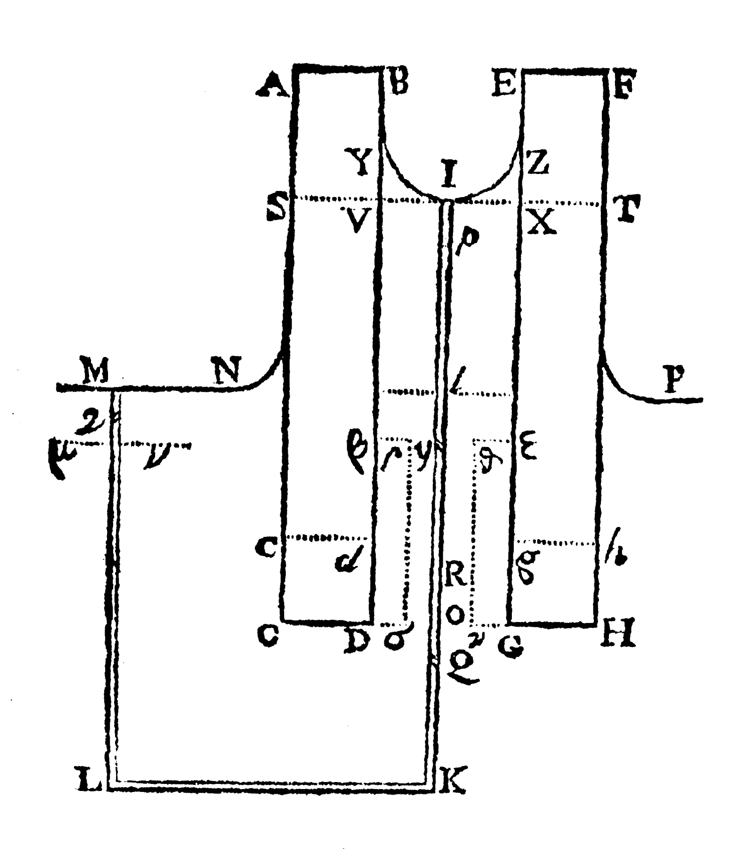
l'intensité de l'attraction du verre... $= h$
l'intensité de l'attraction de l'eau... $= k$
la force de la pesanteur............ $= p$

Ensuite je suppose que la fonction de la distance qui exprime la loi de l'attraction, tant du verre que de l'eau, soit donnée, et qu'on ait calculé,

1° La force avec laquelle un corpuscule placé à la distance............... x d'un plan *MN*, est attiré par un corps dont ce plan est la surface extérieure, et je nomme cette force.............. $[x]$ en supposant que l'intensité de l'attraction de ce corps soit l'unité. Je me sers de l'expression $[x]$, afin de désigner une fonction de x dans laquelle les dimensions du corps attractif n'entrent pas ; car je suppose ce corps assez grand pour être traité comme s'il était infini, ce qui est permis par l'hypothèse que l'attraction n'est sensible qu'à une très-petite distance;

2° La force avec laquelle un corpuscule *Q* placé à la distance *QO*, x de la surface *CH*, est attiré par le tube ou cylindre

creux *CDABGHEF*, et je prends pour exprimer cette force, la fonction..[b, x]



supposant que l'intensité de l'attraction soit encore l'unité. On voit bien que j'entends par [b, x], une fonction dans laquelle on ne fait entrer ni l'épaisseur ni la hauteur du tube, qu'on suppose infinies.

3° La force avec laquelle un corpuscule p placé à la distance x de VX, est attiré par la petite masse d'eau $YVXZ$, et je la nomme....$[b, x, h, k]$.

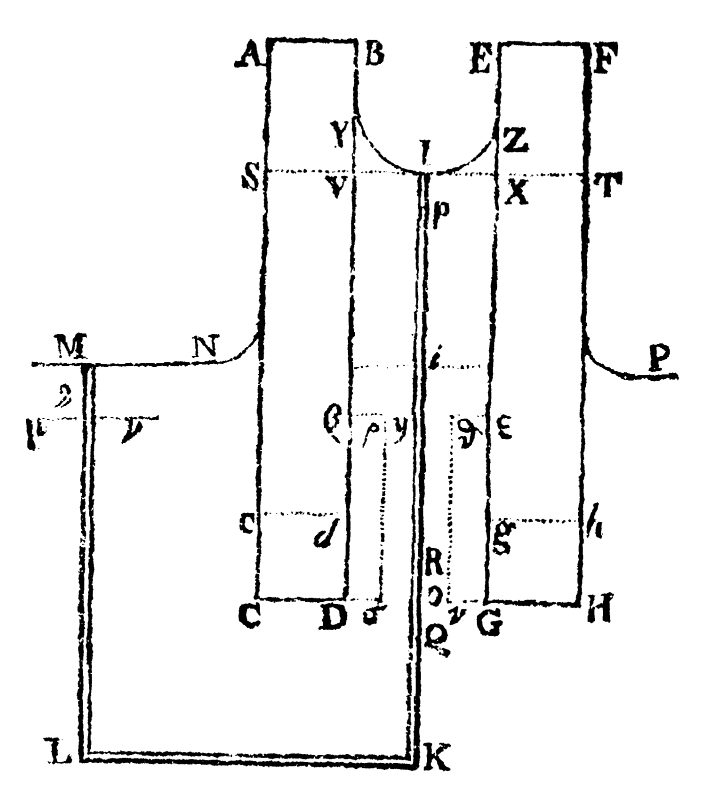
Cela posé, je dis que deux forces agissent dans la colonne ML pour la faire peser en enbas ; l'une, la force de la pesanteur qui s'exerce dans toute la longueur ML, l'autre, l'attraction des parties de l'eau qui n'a d'effet que vers M. Que γ soit un corpuscule placé à une très-petite distance x de MN, en imaginant le plan $\mu\nu$ parallèle à MN, et placé de manière que γ soit au milieu de l'intervalle des deux plans ; il est clair que l'eau renfermée dans cet intervalle n'agira point sur le globule γ, mais que celle qui sera au-dessous du plan $\mu\nu$ attirera γ en enbas, et que l'expression de sa force attractive sera $k[x]$. Donc le poids de ML sera

$$p.\, ML + \int k dx [x]$$

en supposant que $dx[x]$ ait été intégré, et qu'on ait fait dans l'intégrale $x = \infty$.

Quant à la colonne IK, pour en trou-

ver le poids, je remarque d'abord que l'attraction du tube n'est d'aucun effet, pour augmenter ou diminuer le poids des parties qui sont vers le bout *I*; car si le haut



ABVSEXTF du tube attire en enhaut les globules du fluide qui sont vers *I*, la partie du tube qui est inférieure à la surface *ST* les attire avec une force égale en enbas. Donc sans changer l'état de la ques-

tion, on peut supposer le tube d'une matière homogène à l'eau, quant à ce qui se passe vers l'extrémité I.

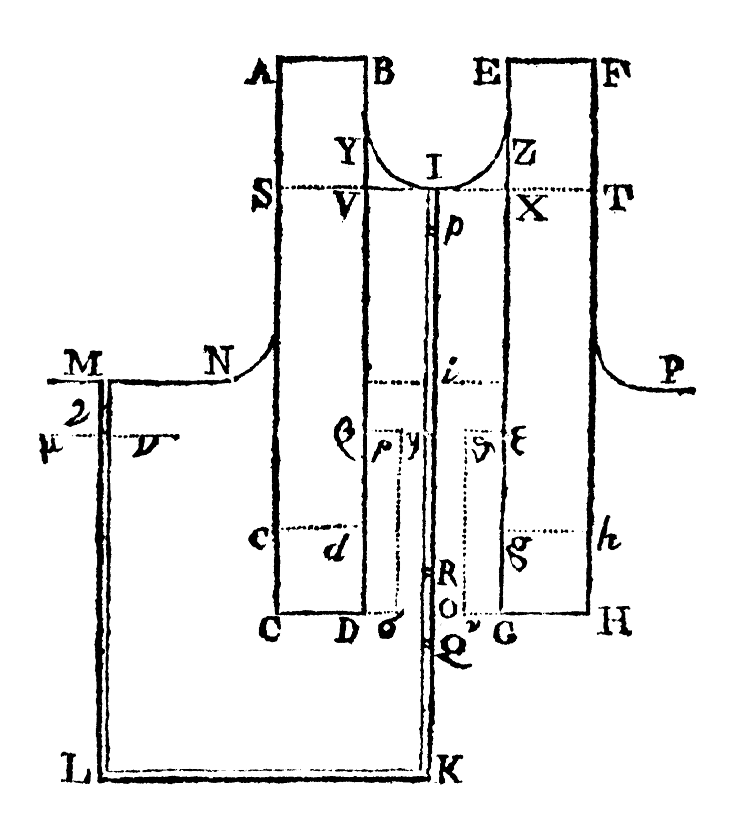
Or dans cette supposition, la matière contenue au-dessous du plan $SVIXT$ attirera en enbas les particules voisines de p avec une force exprimée par $k[x]$, si la petite distance Ip est nommée x. Mais le cylindre creux $ABSVEXTF$ attirera les mêmes parties en enhaut avec une force exprimée par $k[b, x]$, et la masse d'eau $YVXZ$ les attirera dans le même sens avec la force $[b, x, h, k]$. Donc la force totale des particules voisines de I se fera en enbas, et aura pour expression $k[x] - k[b, x] - [b, x, h, k]$.

Donc le poids total de toutes les parties voisines de I sera

$$k\int dx\,[x] - k\int dx\,[b, x] - \int dx\,[b, x, h, k].$$

Il n'est plus question présentement que d'examiner ce qui se passe vers le bout O; pour cela j'imagine au-dessous du plan CH, un tube pareil à celui qui est au-dessus, mais qui soit d'une matière dont l'at-

traction ait la même intensité que celle de l'eau; il est évident que ce nouveau tube attirera en enbas les particules voisines de *O*; mais comme le tube de verre attirera



les mêmes parties en enhaut avec une force plus grande dans la raison de *h* à *k*, il s'ensuit qu'on peut mettre à part l'attraction du nouveau tube, et imaginer seulement que le tube *ABCDEFGH* soit d'une

matière dont l'attraction ait pour intensité $h-k$.

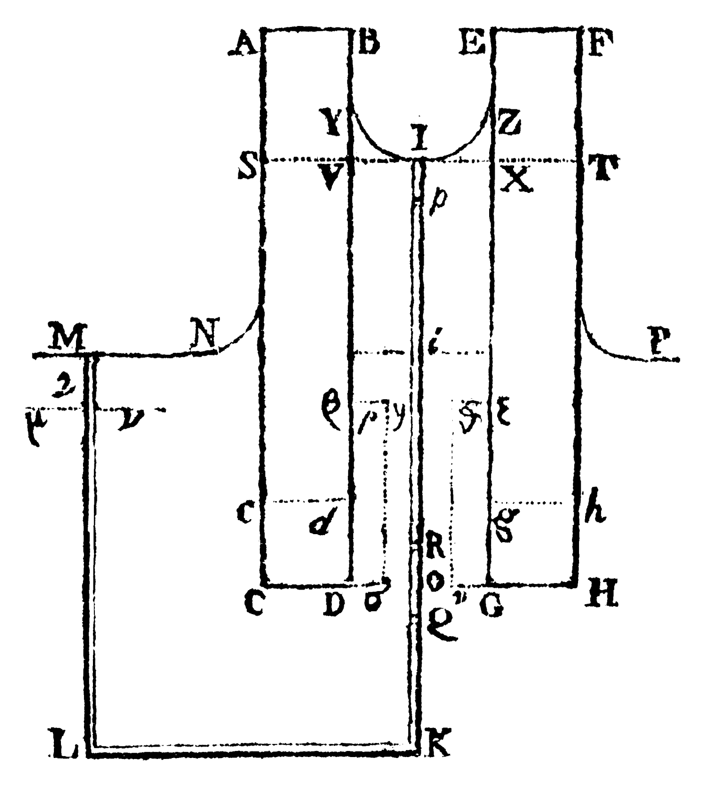
Quant à l'attraction de l'eau qui serait renfermée entre les parois YD, ZG prolongées au-dessous de DG, il est clair qu'elle ne doit pas être comptée, puisque les parties supérieures à DG, et les parties inférieures au même plan se détruisent leur effet réciproquement.

De là il suit que les parties Q qui sont à la distance x de DG, sont attirées en enhaut avec la force $(h-k).[b,x]$. De plus, les parties R qui seront au-dessus de DG à la même distance x de ce plan, seront attirées en enhaut avec la même force $(h-k).[b,x]$; car si on mène ch parallèle à CH et à la même distance de R, que R de CH; il est clair que le tube $ABcdEghF$ attirera en enhaut la particule R, comme le tube $ABCDGHFE$ attire le globule Q. Donc le poids total des parties voisines du bout O du tube se fera en enhaut, et aura pour expression

$$(2h-2k).\int dx[b,x].$$

Donc le poids de toute la colonne IK sera

$$p.IK + k\int dx[x] - k\int dx[b,x]$$
$$-\int dx[b,x,h,k] - 2(h-k).\int dx[b,x];$$



égalant cette valeur à celle du poids de la colonne ML, il viendra, après la réduction, pour la hauteur Ii de l'eau élevée au-dessus du niveau

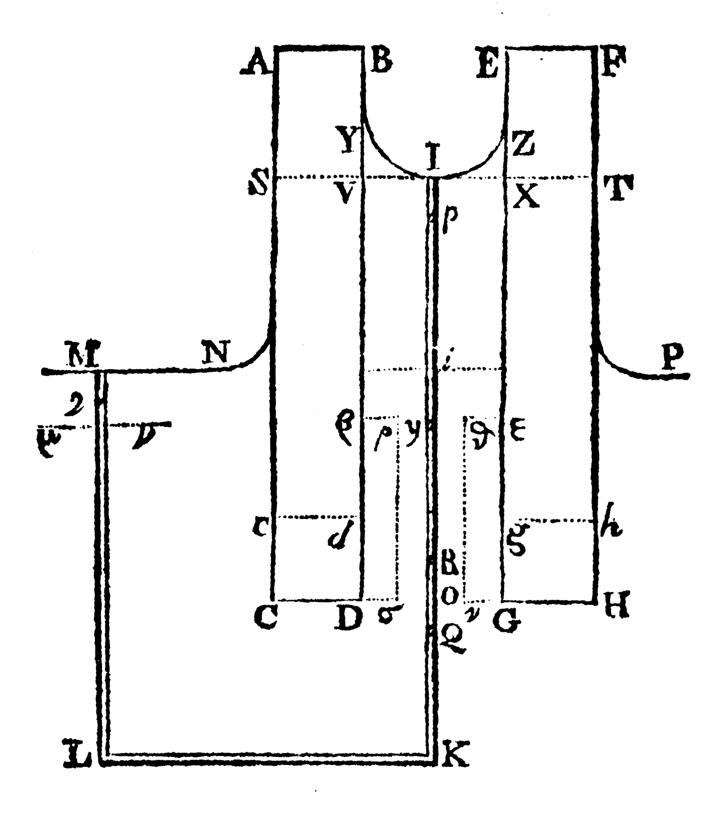
$$\frac{(2h-k).\int dx[b,x] + \int dx[b,x,h,k]}{p}.$$

Or, sans pousser le calcul plus loin pour savoir ce que seraient les quantités $[b, x]$ et $[b, x, h, k]$ suivant les différentes fonctions de la distance qu'on pourrait prendre pour exprimer la loi de l'attraction, on doit voir facilement qu'il y a une infinité de lois d'attraction, dans lesquelles l'expression précédente de Ii donnera une hauteur fort sensible, lorsque le diamètre b du tube sera très-petit, et au contraire, une hauteur presque nulle, lorsque le tube sera un peu gros. On doit voir encore qu'il y a une telle loi à donner à l'attraction, qu'il en résultera que Ii sera en raison renversée du diamètre, ainsi que l'expérience le donne.

§ LX.

On tire de l'expression précédente de Ii une proposition assez singulière, c'est que *quand même l'attraction du tuyau capillaire serait d'une intensité plus petite que celle de l'eau, pourvu que cette intensité ne fût pas deux fois moindre, l'eau monterait encore*. Car on voit par

le terme $(2h-k)\int dx[b,x]$ que toutes les fois que k sera moindre que $2h$, Ii sera positive.



§ LXI.

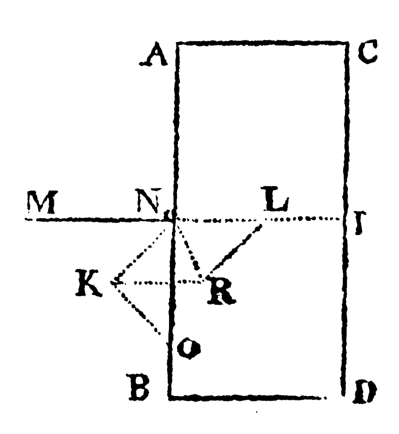
On pourrait cependant former une objection contre cet argument, on pourrait dire qu'on ne sait pas ce que devient la quantité $[b,x,h,k]$ qui exprime l'attrac-

tion de la petite masse d'eau *YVXZ* sur les particules qui sont vers *I*, parce que l'eau s'attirant plus elle-même que la matière du tube ne l'attirerait, il se pourrait bien faire que la courbe *YIZ* serait en dessous, et que le terme $\int dx\,[b, x, h, k]$ devînt par là négatif, ce qui empêcherait effectivement l'argument précédent d'avoir lieu.

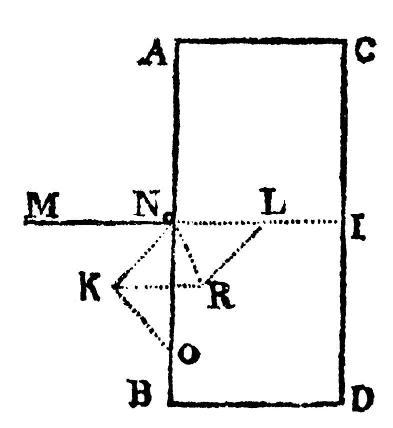
§ LXII.

Pour répondre à cette difficulté, il suffit de voir que l'eau peut faire une courbe concave auprès des parois d'un corps qu'on y trempe, quoique son attraction soit plus grande que celle de la matière de ce corps.

Que le parallélipipède *ABCD*, par exemple, représente le corps plongé, l'horizontale *NM* la surface de l'eau; afin de déterminer la



direction de la force avec laquelle un corpuscule placé dans l'angle *N* est attiré, tant par le corps *ABCD*, que par l'eau *MNB*, supposons que *NL* exprime l'attraction de *ABCD* sur *N*, et que *NO* exprime la force avec laquelle le même corpuscule serait attiré verticalement, si tout ce qui est au-dessous de la surface *MI*



était d'eau; il est clair qu'en décrivant sur *NO* le triangle rectangle isocèle *NKO*, *NK* sera l'attraction de l'eau *MNB* sur *N*; donc la diagonale *NR* du parallélogramme *NLRK* sera la direction de la force totale qui agit sur *N*. Or il est évident que cette ligne sera en dedans du corps *ABCD*, si *NO* est plus petit que 2 *NL*. Donc la courbe par laquelle l'eau vient joindre le corps *ABCD* sera concave, puisque les petits côtés de cette courbe doivent être perpendiculaires aux

directions des forces qui animent les particules de l'eau.

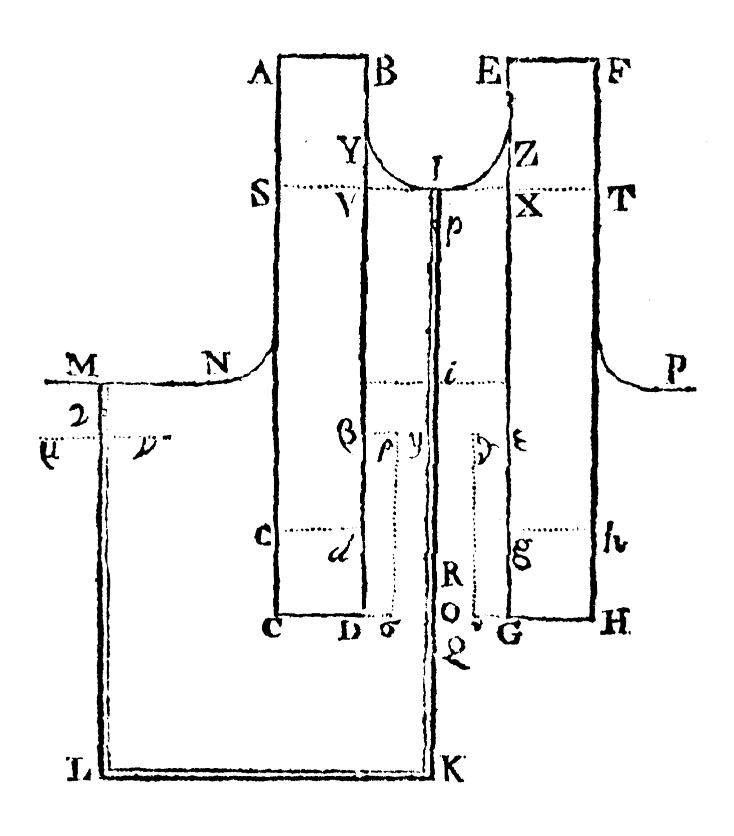
§ LXIII.

De l'ascension de l'eau dans un tuyau capillaire composé de deux cylindres d'inégale grosseur.

Comme l'attraction du bout inférieur du tube entre pour le moins autant que celle du bout d'enhaut, dans l'examen que je viens de donner des forces qui causent l'ascension de l'eau dans les tuyaux capillaires, ceux qui connaîtront les expériences de M. Jurin, pourraient s'en rappeler une, qui au premier coup-d'œil semblerait démentir les raisonnemens précedens: cette expérience consiste en ce que si on soude deux tuyaux capillaires d'inégale grosseur, et qu'on trempe le bout le plus étroit dans l'eau, cette liqueur n'y monte pas plus haut, que si tout le tuyau était de la même grosseur que par le bout d'enhaut.

Pour expliquer ce fait, reprenons tout

ce que nous avons dit § LIX, mais imaginons de plus, que $D\sigma\rho\beta G\varepsilon\vartheta\upsilon$ soit un nouveau tube de verre placé au-dedans de la



capacité *BDEG*; il est clair que l'addition de ce cylindre fera le même effet, que le tube composé des deux tuyaux soudés dont nous venons de parler. Maintenant, à cause que dans le calcul précédent, on

a supposé que l'espace $D\beta\rho\sigma G\varepsilon\vartheta\upsilon$ était d'eau au lieu d'être de verre, il faut ajouter aux forces qui agissent sur la colonne IK, l'effet de l'attraction d'un cylindre creux $D\beta\rho\sigma G\varepsilon\vartheta\upsilon$ supposé d'une matière dont l'attraction aurait pour intensité $h - k$. Or il est aisé de voir que cet effet est nul, car si le bout $D\sigma\upsilon G$ attire en enhaut les parties voisines de O, le bout $\beta\rho\vartheta\varepsilon$ attirera en enbas avec la même force les parties voisines de y. Donc IK restera de même poids qu'avant l'addition du tube $D\beta\rho\sigma\vartheta\upsilon G\varepsilon$. Donc la hauteur de cette colonne sera toujours la même.

§ LXIV.

Il ne serait pas plus difficile d'expliquer pourquoi, lorsque le tube composé des deux tuyaux inégaux a le bout le plus gros dans l'eau, la hauteur de la colonne qui se soutient dans ce tube composé, est la même, que si le tube était un seul cylindre de la même grosseur que la partie d'en haut.

§ XLV.

Quant à la descente du vif-argent dans les tuyaux capillaires, je ne m'arrêterai pas à l'expliquer, parce qu'il ne faut absolument que les principes que je viens d'employer, pour faire voir que les forces qui tirent en enbas dans la colonne qui traverse le tube, sont plus grandes que cellesqui agissent dans les autrescolonnes, et par conséquent que cette colonne doit être la plus courte.

CHAPITRE XI.

De l'équilibre des parties d'une planète composée de différens fluides qu'on suppose ne pouvoir pas se mêler.

§ LXVI.

Dans un amas de plusieurs fluides supposés parvenus à leur état d'équilibre, la surface qui termine le fluide supérieur, et celles qui séparent les différens fluides intérieurs doivent être